STEPHANEPRETESEILLE.COM
POUR LE PLAISIR DES MATHS

Changement de variable

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}-1}}{2}\right)$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi \left[1+\cos^2(t)\right]\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2-\frac{\pi}{2}$.
5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 1$.

Solutions détaillées

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t - 1$ est continue sur $[1,2]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$ est continue sur $[1,2]$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}$ est continue sur $[1,2]$ comme produit et quotient, donc le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,2]$, de fonctions continues sur $[1,2]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}$ est bien définie.
De plus, la fonction $t \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,2]$ sur $[\sqrt{\mathrm{e}-1}, \sqrt{\mathrm{e}^2-1}]$ et on a, pour tout $t \in [1,2]$ et pour tout $u \in [\sqrt{\mathrm{e}-1}, \sqrt{\mathrm{e}^2-1}]$:
$$u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1} \Leftrightarrow t = \ln(1+u^2),$$
donc, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t-1}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$:
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}} &= \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{1+u^2}{(4+u^2)u} \times \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{2}{4+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\end{aligned}$$
et donc :
$$\boxed{\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t-1}} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{2}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}-1}}{2}\right)}$$

2. La fonction $t \mapsto \left[1+\cos^2(t)\right]\sin(t)$ est continue sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \left[1+\cos^2(t)\right]\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. De plus la fonction cos est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ avec :
$$\cos(0) = 1 \quad \text{et} \quad \cos(\pi) = -1,$$
donc on obtient, en effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$:
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left[1+\cos^2(t)\right]\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{-1}(1+u^2)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_{-1}^1 (1+u^2)\,\mathrm{d}u \\ &= \left[u + \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1\end{aligned}$$
et donc :
$$\boxed{\int_0^\pi \left[1+\cos^2(t)\right]\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}}$$

3. Notons déjà que la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.
Comme la fonction cos est de classe C^1 et strictement monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec :

$$\cos(0) = 1 \quad \text{et} \quad \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0,$$

on en déduit, en effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)$, $\mathrm{d}t = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(\theta)}\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

et comme la fonction sin est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}}$$

4. La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ existe. De plus, la fonction $x \mapsto \tan^2(x)$ est de classe C^1 et strictement monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$\tan^2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tan^2\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 1$$

et donc, en effectuant le changement de variable $t = \tan^2(x)$, $\mathrm{d}t = 2\tan(x)[1+\tan^2(x)]\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\tan(x)|}{1+\tan^2(x)} \times 2\tan(x)[1+\tan^2(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} [1+\tan^2(x)-1]\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ [\tan(x) - x]_0^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{\pi}{2}}$$

5. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est continue sur $\left[\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ existe. De plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $\left[\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$ donc on obtient, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\,(-\mathrm{d}u)\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u\\ &= [-\cos(u)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 1}$$