Changement de variable

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}} = 2\sqrt{2}-2.$

2. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$

3. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{\mathrm{e}^2-1}-\sqrt{\mathrm{e}-1}-\mathrm{Arctan}(\sqrt{\mathrm{e}^2-1})+\mathrm{Arctan}(\sqrt{\mathrm{e}-1})\right].$

Solutions détaillées

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$ est continue sur $[1, \mathrm{e}]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$ existe. De plus, la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe C^1 sur $[1, \mathrm{e}]$ donc on obtient, en effectuant le changement de variable $v = \ln(t)$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$:

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v}} \\ &= \left[2\sqrt{1+v}\right]_0^1\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}} = 2\sqrt{2} - 2}$$

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[1, 2]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ existe. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de classe C^1 de $[1, 2]$ sur $[1, \sqrt{2}]$ donc, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^t\, 2t\,\mathrm{d}t.$$

De plus, les fonctions $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^t$ sont de classe C^1 sur $[1, \sqrt{2}]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[2t\,\mathrm{e}^t\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[2t\,\mathrm{e}^t\right]_1^{\sqrt{2}} - \left[2\mathrm{e}^t\right]_1^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$$

3. Notons déjà que la fonction $x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ est continue sur $[1, 2]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ existe. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ est une bijection de classe C^1 de $[1, 2]$ sur $[\sqrt{\mathrm{e}-1}, \sqrt{\mathrm{e}^2-1}]$ et on a, pour tout $x \in [1, 2]$ et pour tout $u \in [\sqrt{\mathrm{e}-1}, \sqrt{\mathrm{e}^2-1}]$:

$$u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \Leftrightarrow x = \ln(u^2+1),$$

donc, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \frac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}} \left(2 - \frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \left[2u - 2\mathrm{Arctan}(u)\right]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^2 \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\ \mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1} - \sqrt{\mathrm{e} - 1} - \mathrm{Arctan}(\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{\mathrm{e} - 1})\right]}$$