Intégrations par parties

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 2}{5}.$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$

Solutions détaillées

1. Les fonctions $t \mapsto t^2$ et sin sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\sin(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\,\sin(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $-\cos$ étant de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on en déduit, à l'aide d'une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t &= -2\left([-t\cos(t)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -2\left(\pi - [-\sin(t)]_0^\pi\right)\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi}$$

2. Les fonctions $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \sin(2t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^{-t}\,2\cos(2t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme les fonctions $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \cos(2t)$ sont de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient alors, avec une deuxième intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= 2\left[-\mathrm{e}^{-t}\,\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^{-t}\,[-2\sin(2t)]\,\mathrm{d}t\\ &= 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

soit encore :

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 2$$

et finalement :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+2}{5}}$$

3. La fonction Arctan est continue sur $[0,1]$ et on peut remarquer que :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\times\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus les fonctions $t \mapsto t$ et Arctan sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t &= [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\ln(t^2+1)}{2}\right]_0^1\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$