Intégrations par parties

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+1\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = -1.$
4. $\displaystyle\int_0^{1} x\,(\mathrm{Arctan}(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.$

Solutions détaillées

1. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\cos(x)$ sont de classe C^1 sur $[0, \pi]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-x\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [-x\cos(x)]_0^{\pi} - [-\sin(x)]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi}$$

2. Les fonctions $x \mapsto x^2+1$ et sin sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+1\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[(x^2+1)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De plus, les fonctions $x \mapsto x$ et $-\cos$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc, par une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+1\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right) - 2\left([-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right) - 2\left(-\frac{\pi}{6} - [-\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right) + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+1\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}}$$

3. La fonction $x \mapsto x^3\cos(x^2)$ est continue sur $[0, \sqrt{\pi}]$ et on peut remarquer que :

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \times 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin(x^2)$ sont de classe C^1 sur $[0, \sqrt{\pi}]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\left[x^2\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[-\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = -1}$$

4. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ (primitive de $x \mapsto x$) et $x \mapsto (\mathrm{Arctan}(x))^2$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(\mathrm{Arctan}(x))^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2+1}{2}\,(\mathrm{Arctan}(x))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1}{2} \times \frac{2\mathrm{Arctan}(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De plus les fonctions $x \mapsto x$ et Arctan sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(\mathrm{Arctan}(x))^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{16} - [x\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^1 x\,(\mathrm{Arctan}(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}$$