# Intégrations par parties

## Solutions des exercices

### Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 1.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\ln(3) - 4\sqrt{3} + 4.$
5. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2.$

## Solutions détaillées

1. La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est continue sur $[0,1]$ et on a :

$$\int_0^1 \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 1 \times \ln(1+u)\,\mathrm{d}u.$$

De plus, les fonctions $u \mapsto 1+u$ (primitive de $u \mapsto 1$) et $u \mapsto \ln(1+u)$ sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+u)\,\mathrm{d}u &= [(1+u)\ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 (1+u) \times \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= [(1+u)\ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \mathrm{d}u\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 1}$$

2. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t^2+1)$ sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln(t^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - [2t - 2\mathrm{Arctan}(t)]_0^1\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}$$

3. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$ et ln sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}$$

4. Les fonctions $t \mapsto 2\sqrt{t}$ et ln sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[1,3]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \left[2\sqrt{t}\ln(t)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{3}\ln(3) - \left[4\sqrt{t}\right]_1^3\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\ln(3) - 4\sqrt{3} + 4}$$

5. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln^2(t)$ sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[1,2]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln^2(t)\right]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{2\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\ln^2(2) - 2\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus, les fonctions $t \mapsto t$ et ln sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[1,2]$ donc, par intégration par parties :

$$\int_1^2 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln^2(2) - 2\left(\left[t\ln(t)\right]_1^2 + \int_1^2 1\cdot\mathrm{d}t\right)$$

et donc :

$$\boxed{\int_1^2 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2}$$