STEPHANEPRETESEILLE.COM
POUR LE PLAISIR DES MATHS

Calculs d'intégrales

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(2)}{2}.$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = 1.$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(u)}{(1-\sin(u))^3}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}.$

Solutions détaillées

1. La fonction tan est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)\,\mathrm{d}u &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(u)}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= -\left[\ln|\cos(u)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(2)}{2}}$$

2. La fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)\,\cos^3(\theta)$ est continue sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} -4\sin(\theta)\,\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4}\left[\cos^4(\theta)\right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0}$$

3. La fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{-\sin(t)}{(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{\cos(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = 1}$$

5. La fonction $u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{(1-\sin(u))^3}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(u)}{(1-\sin(u))^3}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos(u)\,(1-\sin(u))^{-2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[(1-\sin(u))^{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(u)}{(1-\sin(u))^3}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}}$$