Calculs de dérivées (2)

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\cos(x^2)$.
2. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}\sin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{2\sin(x)-1}{[2+\sin(x)]^2}$.
5. $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 0$.

Solutions détaillées

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\cos(x^2)}$$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonctions rationnelle bien définie sur cet intervalle. De plus la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \times \left[-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

3. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}}$$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{-\sin(x)\,[2+\sin(x)] - \cos(x) \times \cos(x)}{[2+\sin(x)]^2} \\ &= \frac{-2\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}{[2+\sin(x)]^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{2\sin(x) - 1}{[2+\sin(x)]^2}}$$

5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 0}$$