Calculs de dérivées

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $f : x \mapsto \ln(x^2+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$.
2. $f : x \mapsto (x-2x^2)\ln(1-x)$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$: $\forall x \in]-\infty, 1[\,,\ f'(x) = (1-4x)\ln(1-x) - \dfrac{x-2x^2}{1-x}$.
3. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et : $\forall x \in]1, +\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1-3x}{2x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\dfrac{5}{(2x+1)^2}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-2}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et : $\forall x \in]-1, 1[\,,\ f'(x) = -\dfrac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$.
7. $f : x \mapsto \sqrt{4x^2-1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et : $\forall x \in]-1, 1[\,,\ f'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Solutions détaillées

1. La fonction $x \mapsto x^2+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}}$$

2. La fonction $x \mapsto x-2x^2$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$. De plus la fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition et produit, f est dérivable sur $]-\infty, 1[$. On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\infty, 1\right[,\ f'(x) = (1-4x)\ln(1-x) - \frac{x-2x^2}{1-x}}$$

3. La fonction ln est dérivable sur $]1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$. et on a :

$$\boxed{\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}}$$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}}$$

5. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{-3\,(2x+1) - 2\,(1-3x)}{(2x+1)^2}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\frac{5}{(2x+1)^2}}$$

6. f est dérivable sur $]-1, 1[$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2-2\right) - x \times 2x}{(x^2-2)^2}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ f'(x) = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}}$$

7. La fonction $x \mapsto 4x^2 - 1$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; de plus la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 1}}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, 1[\,,\ f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}}$$