Limites de fonctions (3)

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)+1}{x^2+x+1} = 0.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)}{x} = 0.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^2+1\right) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$

Solutions détaillées

1. On a :

$$\cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

donc :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$$

et :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \left| \frac{\sin(x) + 1}{x^2 + x + 1} \right| &\leqslant \frac{|\sin(x)| + 1}{x^2 + x + 1} \\ &\leqslant \frac{2}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2 + x + 1} = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x) + 1}{x^2 + x + 1} = 0}$$

3. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant x^2$$

Or on a :

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

4. On a :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \ \tan(x^2) = \frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$$

Or on a :

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

et :

$$\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u \quad \text{et} \quad \cos(u) \underset{u \to 0}{\sim} 1$$

d'où :

$$\tan(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$$

On a ainsi :

$$\frac{\tan(x^2)}{x} \underset{x \to 0}{\sim} x$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)}{x} = 0}$$

5. On a :

$$\tan(u) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} \underset{u\to 0}{\sim} u \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \operatorname{Arctan}(t) = 0$$

donc :

$$\tan(\operatorname{Arctan}(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \operatorname{Arctan}(t)$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{Arctan}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$$

Or on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

d'où :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

On en déduit :

$$\left(x^2+1\right) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \left(x^2+1\right) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty}$$