STEPHANEPRETESEILLE.COM
POUR LE PLAISIR DES MATHS

# Limites de fonctions (2)

## Solutions des exercices

### Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{x} = \mathrm{e}.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3} = 1.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{4}.$

### Solutions détaillées

1. *Une forme indéterminée avec une fonction affine au dénominateur ? Penser à faire apparaître un taux d'accroissement.* On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{x} = \mathrm{e} \times \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{0}}{x-0}$$

Or la fonction exponentielle est dérivable en 0 donc on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{0}}{x-0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{x} = \mathrm{e}}$$

2. On a :

$$\forall x \in \,]2,3[\,\cup\,]3,+\infty[\,,\ \frac{\ln(x-2)}{x-3} = \frac{\ln(x-2)-\ln(3-2)}{x-3}$$

De plus la fonction $g : x \mapsto \ln(x-2)$ est dérivable en 3 (car la fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable en 3 et la fonction ln est dérivable en $3-2=1$) donc on a :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)-\ln(3-2)}{x-3} = g'(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3} = 1}$$

$x \mapsto \dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ en $a = 3$,

3. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,2[\,\cup\,]2,+\infty[\,,\ \frac{1}{x-2}+\frac{4}{4-x^2} &= \frac{1}{x-2}+\frac{4}{(2-x)(2+x)}\\ &= \frac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

donc, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ étant continue en 2 :

$$\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}+\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{4}}$$