STEPHANEPRETESEILLE.COM
POUR LE PLAISIR DES MATHS

Limites de fonctions (1)

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\lim\limits_{a \to 2} \dfrac{\ln(x)}{x+1} = \dfrac{\ln(2)}{3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\ln(x)} = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}} = \sqrt{2}$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right] = 0$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-1} - x + 1\right] = 1$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 3} = +\infty$.

Solutions détaillées

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x+1}$ est continue en 2 comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas en 2, de fonctions qui le sont, donc :

$$\boxed{\lim_{a\to 2} \frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(2)}{3}}$$

2. La fonction exponentielle est continue en 0 donc on a :

$$\lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x - 2) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\ln(x)} = 0}$$

3. *Une indétermination, donc on transforme l'expression.* On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1[\,,\ \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} &= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}} \\ &= \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue en 1 donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} = \sqrt{2}}$$

4. *Une indétermination avec une différence de racines, donc on multiplie et on divise par l'expression conjuguée pour simplifier.* On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [2, +\infty[\,,\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \\ &= \frac{(x+2) - (x-2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right] = +\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right] = 0}$$

5. On procède de même :

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]1,+\infty[\,,\ \sqrt{x^2-1}-x+1 &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}+1\\ &= \frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}+1\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}+1\end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x+1\right]=1}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]\ln(3),+\infty[\,,\ \frac{x+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-3} &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(x\,\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{\mathrm{e}^x(1-3\,\mathrm{e}^{-x})}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}\left(x\,\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1-3\,\mathrm{e}^{-x}}\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-3\,\mathrm{e}^{-x}\right)=1$$

On a par ailleurs, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}=0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-2x}+1}{1-3\,\mathrm{e}^{-x}}=1$$

et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-3}=+\infty}$$