Sommes finies doubles

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \frac{n\,(n+1)\,(3n^2+7n+2)}{24}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j) = n\,(n+1).$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 3^{i+j} = \frac{9\,(3^n-1)^2}{4}.$

5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 3^{i+j} = \frac{3^{2n+3}-4\times 3^{n+2}+9}{16}.$

Solutions détaillées

1. *Les indices sont indépendants donc on peut factoriser.* On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]\left[\sum_{j=1}^{n} j\right]$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2}$$

2. *Attention, ici les indices sont liés par la condition $j \leqslant i$, donc on calcule d'abord la somme en j.* On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij &= \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{i} j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{i\,(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} i^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{n\,(n+1)}{24}\left[3n\,(n+1) + 2\,(2n+1)\right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \frac{n\,(n+1)\,(3n^2+7n+2)}{24}}$$

3. *Procéder avec minutie pour éviter les erreurs.* On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ni) + \sum_{i=1}^{n}\frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= n \times \frac{n\,(n+1)}{2} + n \times \frac{n\,(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = n\,(n+1)}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}3^{i+j} &= \left[\sum_{i=1}^{n}3^i\right]\left[\sum_{j=1}^{n}3^j\right]\\ &= \left[3\times\frac{1-3^n}{1-3}\right]^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}3^{i+j} = \frac{9\left(3^n-1\right)^2}{4}}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}3^{i+j} &= \sum_{i=1}^{n}\left[3^i\sum_{j=i}^{n}3^j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}3^i\times 3^i\times\frac{1-3^{n-i+1}}{1-3}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(3^{n+i+1}-3^{2i})\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}3^{n+i+1}-\sum_{i=1}^{n}9^i\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3^{n+2}\times\frac{1-3^n}{1-3}-9\times\frac{1-9^n}{1-9}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[3^{n+2}\times\frac{3^n-1}{2}-9\times\frac{9^n-1}{8}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{9^{n+1}-3^{n+2}}{2}-\frac{9^{n+1}-9}{8}\right]\\ &= \frac{4\times 9^{n+1}-4\times 3^{n+2}-9^{n+1}+9}{16}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}3^{i+j} = \frac{3^{2n+3}-4\times 3^{n+2}+9}{16}}$$