Sommes finies

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\,(n+1)\,2^{n-2}$.

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

Solutions détaillées

1. *Une somme avec un coefficient binomial, donc on pense à utiliser la formule du binôme de Newton.* On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \, 1^{n-k}$$

donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n}$$

2. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \, (-1)^{n-k}$$

donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = (1-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}$$

3. On sait (en cas de doute, écrire la combinaison $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles pour le retrouver) que, **si n est supérieur ou égal à** 1 :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

donc (le premier terme de la somme étant nul) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

donc, encore d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Enfin si $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 = 0 \times 2^{0-1}$$

donc le cas $n = 0$ rejoint le cas général et :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

4. On a de même :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^{k+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k}\\ &= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k} - 1\right]\end{aligned}$$

donc, encore d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}}$$

5. *Attention, astuce à connaître !* On remarque que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ k^2 = k\,(k-1) + k$$

ce qui nous permet d'écrire, **si $\boldsymbol{n \geqslant 2}$**, en enlevant les termes nuls :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

De même que dans la question 3, on en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + n\,2^{n-1}\\ &= n\,(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\,2^{n-1}\\ &= n\,(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + n\,2^{n-1}\\ &= n\,(n-1)\,2^{n-2} + n\,2^{n-1}\\ &= n2^{n-2}\,[(n-1)+2]\\ &= n\,(n+1)\,2^{n-2}\end{aligned}$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ rejoignent le cas général car :

$$\sum_{k=0}^{0} k^2\binom{n}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{1} k^2\binom{n}{k} = 0 + 1^2\binom{1}{1} = 1$$

donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n\,(n+1)\,2^{n-2}}$$

6. *Somme classique.* On note :

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

On remarque que :

$$\{2k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} \cup \{2k+1,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = [\![0, 2n+1]\!]$$

et donc :

$$S + T = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{n}{k}$$

et comme $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$:

$$S + T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

et donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$S + T = 2^n$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} S - T &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$S - T = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On en déduit que (S, T) est solution du système :

$$\begin{cases} S + T = 2^n \\ S - T = 0^n \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} S = \dfrac{2^n + 0^n}{2} \\ T = \dfrac{2^n - 0^n}{2} \end{cases}$$

soit finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}$$