Inéquations

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2-5x \leqslant 3$ est $\left[-\dfrac{1}{5}, +\infty\right[$.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $3-2x > x-5$ est $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right[$.
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(4x+7)(5x-3) \leqslant 0$ est $\left[-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{5}\right]$.
4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+x \geqslant 12$ est $]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[$.
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$ est $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-2)(x+1) > 2x\,(5x+5)$ est $\left]-1, -\dfrac{2}{7}\right[$.
7. L'ensemble des solutions de l'inéquation $9x < x\left(2x^2+5\right)$ est $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$.
8. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{x+1} < \dfrac{2}{x-2}$ est $]-\infty, -1[\cup]2, 8[$.
9. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{1-3x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ est $]-\infty, 0[\cup \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right[$.

Solutions détaillées

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 2-5x \leqslant 3 &\Leftrightarrow -1 \leqslant 5x \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leqslant x \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $2-5x \leqslant 3$ est $\left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[$.

2. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3-2x > x-5 &\Leftrightarrow 8 > 3x \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3} > x \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $3-2x > x-5$ est $\left]-\infty, \frac{8}{3}\right[$.

3. $x \mapsto (4x+7)(5x-3)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont $-\frac{7}{4}$ et $\dfrac{3}{5}$ et dont le coefficient dominant est strictement négatif (il est égal à 20).

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(4x+7)(5x-3) \leqslant 0$ est donc $\left[-\frac{7}{4}, \frac{3}{5}\right]$.

4. Pour tout réel x :

$$x^2 + x \geqslant 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \geqslant 0$$

De plus $x \mapsto x^2 + x - 12$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -4 et 3 (son discriminant est égal à 49) et dont le coefficient dominant est strictement positif donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + x \geqslant 12$ est $]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[$.

5. $x \mapsto x^2 - 9$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -3 et 3 et dont le coefficient dominant est strictement positif donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 9 \geqslant 0$ est $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

6. Pour tout réel x (*il y a pas un facteur commun, donc il est préférable de tout regrouper et factoriser !*) :

$$\begin{aligned} (3x-2)(x+1) > 2x\,(5x+5) &\Leftrightarrow (3x-2)(x+1) - 10x\,(x+1) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(3x-2-10x) > 0 \\ &\Leftrightarrow -(x+1)(7x+2) > 0 \end{aligned}$$

Enfin $x \mapsto -(x+1)(7x+2)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -1 et $-\dfrac{2}{7}$ et dont le coefficient dominant est strictement négatif (il est égal à -7) donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-2)(x+1) > 2x\,(5x+5)$ est $\left]-1, -\frac{2}{7}\right[$.

7. Pour tout réel x (*il y a pas un facteur commun, donc il est préférable de tout regrouper et factoriser !*) :

$$\begin{aligned} 9x < x\left(2x^2+5\right) &\Leftrightarrow x\left(2x^2+5\right) - 9x > 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(2x^2-4\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x\left(x^2-2\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

On termine à l'aide d'un tableau de signes (en notant $P(x) = 2x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$) :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $9x < x\left(2x^2+5\right)$ est $\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$.

8. *Avec des fractions, on met au même dénominateur !*. Pour tout réel x différent de -1 et 2 :

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+1} < \frac{2}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+1} > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2\,(x+1)-3\,(x-2)}{(x-2)(x+1)} > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{8-x}{(x-2)(x+1)} > 0\end{aligned}$$

On termine à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		8		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{4-x}{(x-2)(x+1)}$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{x+1} < \dfrac{2}{x-2}$ est $]-\infty,-1[\cup]2,8[$.

9. Pour x différent de 0 et $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3x} \geqslant \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{x} > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x-(1-3x)}{x\,(1-3x)} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{4x-1}{x\,(1-3x)} \geqslant 0\end{aligned}$$

On termine à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-3x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{4x-2}{x(1-3x)}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{1-3x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ est $]-\infty,0[\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right[$.