Factorisation, développement

Solutions des exercices

Solutions (solutions détaillées en page 2)

1. a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
   c) $(2a-1)(b+4) = 2ab + 8a - b - 4$.
   d) $(a-3)(2a+7) + 3\left(a^2+2\right) = 5a^2 + a - 15$.
   e) $(a+2b)(2b-c) = 2ab - ac + 4b^2 - 2bc$.
   f) $(1+a+c)(2-a+b) = 2 - a + b + 2a - a^2 + ab + 2c - ac + bc$.
   g) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
   h) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   i) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.
2. a) $9a^2 - 3a = 3a\,(3a-1)$.
   b) $a\,(a+4) + a\,(2-3a) = 2a\,(3-a)$.
   c) $(2a-1)^2 + 1 - 2a + (2a-1)(6a+2) = 8a\,(2a-1)$.
   d) $(4a-2)^2 - (1-2b)^2 = (4a+2b-3)(4a-2b-1)$.
   e) $9a^2 - 30a + 25 = (3a-5)^2$.
   f) $36 - (2a+1)^2 = (5-2a)(7+2a)$.

Solutions détaillées

1. a) C'est une identité remarquable !

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Encore une !

$$(a-b)^2$$

c) On développe tranquillement :

$$\begin{aligned}(2a-1)(b+4) &= 2a\,(b+4) - (b+4)\\ &= 2ab + 8a - b - 4\end{aligned}$$

d) On fait de même :

$$\begin{aligned}(a-3)(2a+7) + 3\left(a^2+2\right) &= a\,(2a+7) - 3\,(2a+7) + 3a^2 + 6\\ &= 2a^2 + 7a - 6a - 21 + 3a^2 + 6\\ &= 5a^2 + a - 15\end{aligned}$$

e) Encore une fois :

$$\begin{aligned}(a+2b)(2b-c) &= a\,(2b-c) + 2b\,(2b-c)\\ &= 2ab - ac + 4b^2 - 2bc\end{aligned}$$

f) Une autre pour la route :

$$\begin{aligned}(1+a+c)(2-a+b) &= (2-a+b) + a\,(2-a+b) + c\,(2-a+b)\\ &= 2 - a + b + 2a - a^2 + ab + 2c - ac + bc\end{aligned}$$

g) Une dernier pour le plaisir, avec une identité remarquable :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2\,(a+b)\,c + c^2\\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + 2ac + 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

h) On peut développer avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^0b^3 + \binom{3}{1}a^1b^2 + \binom{3}{2}a^2b^1 + \binom{3}{3}a^3b^0\\ &= b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3\end{aligned}$$

i) On peut développer avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= \binom{4}{0}a^0(-b)^4 + \binom{4}{1}a^1(-b)^3 + \binom{4}{2}a^2(-b)^2 + \binom{4}{3}a^3(-b)^1 + \binom{4}{4}a^4(-b)^0\\ &= b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - a^3b + a^4\end{aligned}$$

2. a) On a :

$$9a^2 - 3a = 3a \times 3a - 3a \times 1 = 3a\,(3a-1)$$

b) On a :

$$\begin{aligned}a\,(a+4) + a\,(2-3a) &= a\,[(a+4) + (2-3a)]\\ &= a\,(6-2a)\\ &= 2a\,(3-a)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(2a-1)^2+1-2a+(2a-1)(6a+2) &= (2a-1)^2+(2a-1)(-1)+(2a-1)(6a+2)\\ &= (2a-1)\,[(2a-1)-1+(6a+2)]\\ &= 8a\,(2a-1)\end{aligned}$$

d) On reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned}(4a-2)^2-(1-2b)^2 &= [(4a-2)-(1-2b)]\,[(4a-2)+(1-2b)]\\ &= (4a+2b-3)(4a-2b-1)\end{aligned}$$

e) Encore une identité remarquable :

$$\begin{aligned}9a^2-30a+25 &= (3a)^2-2\times 3a\times 5+5^2\\ &= (3a-5)^2\end{aligned}$$

f) Une dernière pour la route :

$$\begin{aligned}36-(2a+1)^2 &= 6^2-(2a+1)^2\\ &= [6-(2a+1)]\,[6+(2a+1)]\\ &= (5-2a)(7+2a)\end{aligned}$$