36 Convergence et approximations

ECG Maths Approfondies
Semestre 4

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires sont supposées définies.
Pour toute variable aléatoire X, on convient de noter F_X sa fonction de répartition.

A. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 36.1 ► Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Exercice 36.1 On se propose de démontrer l'inégalité de Markov. Pour cela, on fixe un réel λ strictement positif et on considère la variable aléatoire $Y = \mathbb{1}_{[X \geqslant \lambda]}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geqslant \lambda \\ 0 & \text{si } X(\omega) < \lambda \end{cases}$$

1. Quelle est l'espérance de Y ?
2. Justifier que :
$$Y \leqslant \frac{X}{\lambda}$$
3. Conclure.

Exercice 36.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1. Démontrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{n}{2t}$$
2. Soit $u \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire e^{uX}.
   (b) En déduire :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-ut}}{2^n}\left(\mathrm{e}^u + 1\right)^n$$

Proposition 36.2

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\lambda^r}$$

Remarque Ce résultat n'est pas au programme, mais il est très utile dans les problèmes d'estimation. Il est donc recommandé de le connaître et surtout de bien maîtriser la preuve.

Preuve Comme la fonction $t \mapsto t^r$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \lambda) = \mathbb{P}(|X|^r \geqslant \lambda^r)$$

De plus, comme X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre r, $|X|^r$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X|^r \geqslant \lambda^r) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\lambda^r}$$

ce qui prouve le résultat attendu.

□

Théorème 36.3 ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve Comme X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 et donc, d'après 36.2 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{\varepsilon^2}$$

ce qui est le résultat attendu puisque :

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2) = \mathbb{V}(X)$$

□

Exercice 36.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{n}{4\varepsilon^2}$$

B. Convergence en probabilité

B.1. Généralités

Définition 36.4

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers X si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Dans ce cas, on note : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Exercice 36.4 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à $]0,1[$ et convergeant vers 0 et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi de Bernoulli de paramètre p_n.
Prouver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

Remarques

a. Autrement dit, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X si la probabilité que X_n soit éloigné de X de plus de ε converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Attention, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X et si toutes les variables aléatoires admettent une espérance, il n'est pas sûr que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ni que, si elle converge, sa limite soit $\mathbb{E}(X)$. Toutes les situations peuvent se produire.

c. Compte tenu de la définition, le lecteur avisé pourra remarquer que, dans un grand nombre de situations, l'inégalité de Markov ou l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev seront très utiles pour démontrer une convergence en probabilité. En particulier, si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots$ et X admettent toutes un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, pour démontrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, il suffira donc de démontrer que $\mathbb{E}(|X_n - X|^r)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 36.5 Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nX_n suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p.

Proposition 36.5

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Preuve ◇ On suppose que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ [|X_n - X| > \varepsilon] \subset [|X_n - X| \geqslant \varepsilon]$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

◇ On suppose que : :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ [|X_n - X| \geqslant \varepsilon] \subset \left[|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

De plus, d'après l'hypothèse initiale et comme $\frac{\varepsilon}{2}$ est strictement positif, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

□

Proposition 36.6

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers X et si f est une fonction continue $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$$

Proposition 36.7

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de variables aléatoires convergeant en probabilité respectivement vers X et vers Y, alors :

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$$

B.2. Loi faible des grands nombres

Proposition 36.8 ▶ Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

Preuve Comme les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettent une même espérance m on a, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)\\ &= m\end{aligned}$$

De plus, comme les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et admettent une même variance σ^2, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} m$$

□

Remarque En particulier, si l'on considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements deux à deux indépendants et de même probabilité p, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p$$

Ce théorème assure donc que la suite des fréquences d'apparition d'un certain événement de probabilité p converge en probabilité vers p, ce qui constitue en quelque sorte une justification partielle, *a posteriori*, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

C. Convergence en loi

C.1. Généralités

Définition 36.9

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en loi** vers la variable aléatoire X si, en notant $\mathrm{C}(F_X)$ l'ensemble des points en lesquels F_X est continue :

$$\forall x \in \mathrm{C}(F_X),\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Dans ce cas, on note : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exercice 36.6 Soit $\lambda \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

1. (a) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$
(a) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$
2. Prouver que la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Remarques

a. Pour définir la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers X, il est important de noter que l'on n'exige pas que, pour tout réel x, la suite $(F_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $F_X(x)$. Par exemple, si l'on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n constante égale à $\dfrac{1}{n}$, il est naturel de dire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire X constante égale à 0. Cependant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad \text{et} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par conséquent, on peut remarquer que :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(0) \neq F_X(0)$$

En revanche, on a tout de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) \neq F_X(x)$$

Comme F_X n'est pas continue en 0, on peut donc dire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

b. L'exemple précédent permet aussi de comprendre pourquoi il n'est pas nécessaire que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$ soit une fonction de répartition (problème de continuité à droite en 0 dans l'exemple), même dans le cas où elle est définie sur $\mathbb{R}$.

c. Les variables aléatoires X_n et X n'ont pas nécessairement besoin d'être définies sur le même espace probabilisé : il s'agit de la convergence d'une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

d. Il est intéressant de savoir que, si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, alors elle converge également en loi vers X (résultat hors programme). En revanche, la réciproque est fausse.

e. Attention, de même que dans le cas de la convergence en probabilité, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X et si toutes les variables aléatoires admettent une espérance, il n'est pas sûr que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ni que, si elle converge, sa limite soit $\mathbb{E}(X)$. Toutes les situations peuvent se produire.

Théorème 36.10

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On a alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Remarques

a. Dans le cas de suites de variables aléatoires prenant des valeurs entières, ce résultat permet d'étudier plus simplement la convergence en loi. Attention cependant à bien étudier la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, notamment dans les cas où $X_n(\Omega)$ dépend de n.

b. Il est important de comprendre que ce résultat ne concerne pas toutes les suites de variables aléatoires discrètes, mais bien seulement celles prenant des valeurs entières. On verra dans le paragraphe suivant qu'une suite de variables aléatoires discrètes peut converger en loi vers une variable aléatoire à densité.

Proposition 36.11

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers X et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$$

C.2. Théorème limite central

Théorème 36.12 ▶ Théorème limite central

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\right)$$

Alors la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En particulier, on a donc, pour tout couple (a, b) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a \leqslant b$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Exercice 36.7 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace de probabilité, indépendantes et suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. En déduire, à l'aide du théorème central limite, que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

D. Approximations

D.1. Approximations de la loi binomiale

Théorème 36.13 ▶ Théorème de Poisson

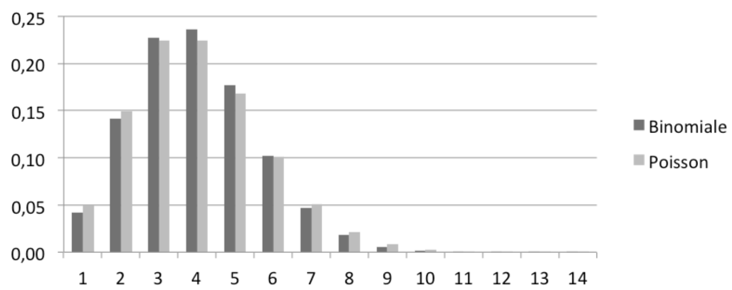
Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ et λ un réel strictement positif tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 36.8 Démontrer le théorème 36.13.

Remarque Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np$ lorsque n est « grand » et p « petit ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$ dès que n est supérieur ou égal à 30, p inférieur ou égal à $\frac{1}{10}$ et np inférieur à 15. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathscr{B}\left(30, \frac{1}{10}\right)$ et Poisson $\mathscr{P}(3)$ (en ligne apparaît la valeur de k, en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$).



Théorème 36.14

Soient p un réel appartenant à $]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{X}_n = \frac{1}{n} X_n \quad \text{et} \quad \overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right)$$

Alors la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

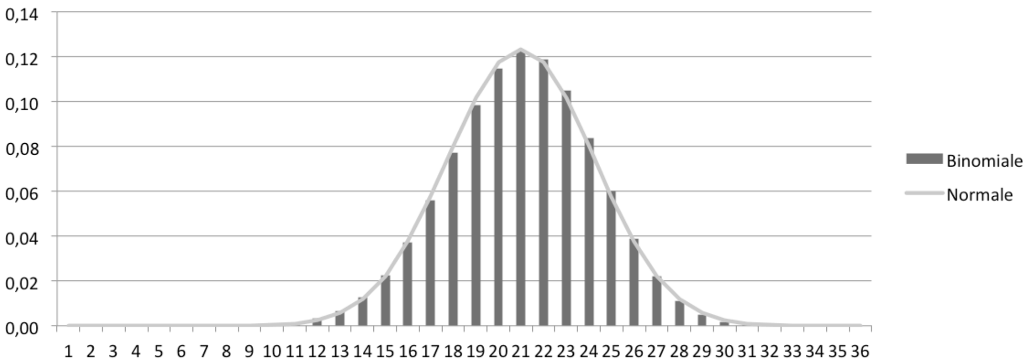
Remarques

a. Le lecteur avisé aura sans doute remarqué que ce résultat est une conséquence du théorème central limite. En effet, si l'on envisage une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^ast}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors, en notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \text{et} \quad \overline{M}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y_n} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right)$$

on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\overline{X}_n^*$ et $\overline{M}_n^*$ suivent la même loi.

b. Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ lorsque n est « grand » et p « pas trop éloigné de $\frac{1}{2}$ ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ dès que n est supérieur ou égal à 30, np et $np(1-p)$ supérieurs ou égaux à 5. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathscr{B}\left(50, \frac{7}{10}\right)$ et normale $\mathcal{N}(35;\ 1,05)$ (en ligne apparaît la valeur de k, en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$ pour la loi binomiale ou de $f(k)$ pour la loi normale).



D.2. Approximations de la loi de Poisson

Théorème 36.15

Soient λ un réel strictement positif et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi de Poisson $\mathscr{P}(n\lambda)$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Alors la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

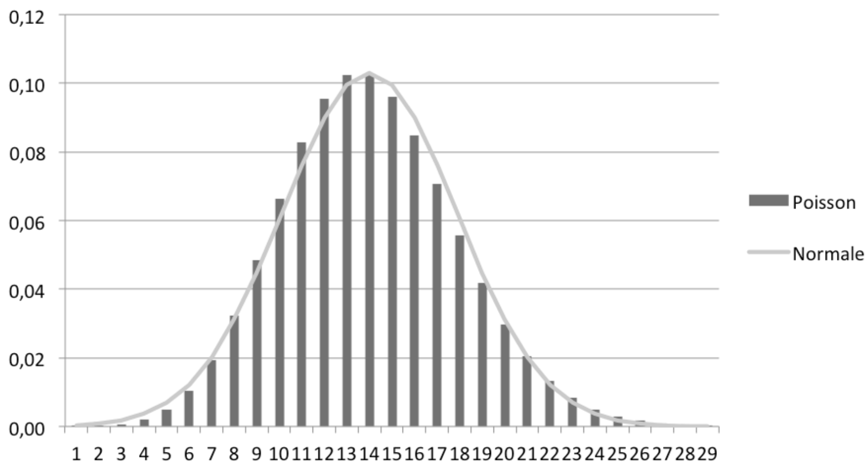
Remarques

a. Le lecteur avisé aura sans doute remarqué que ce résultat est une conséquence du théorème central limite. En effet, si l'on envisage une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^ast}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1, alors, en notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \text{et} \quad \overline{M}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\overline{X}_n^*$ et $\overline{M}_n^*$ suivent la même loi.

b. Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ lorsque λ est « grand ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que λ est supérieur ou égal à 10. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathscr{P}(20)$ et normale $\mathcal{N}(20, 20)$ (en ligne apparaît la valeur de k, en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$ pour la loi de Poisson ou de $f(k)$ pour la loi normale).



E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 36-1

1. Par définition, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda)$, donc on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X \geqslant \lambda)$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut remarquer que :

   - si $X(\omega) \geqslant \lambda$, alors : et donc :

$$Y(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{X(\omega)}{\lambda} \geqslant 1$$

   - si $X(\omega) < \lambda$, alors, comme X est une variable aléatoire positive :

$$Y(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{X(\omega)}{\lambda} \geqslant 0$$

   Dans tous les cas, on a donc :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leqslant \frac{X(\omega)}{\lambda}$$

   d'où :

$$Y \leqslant \frac{X}{\lambda}$$

3. On en déduit, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X \geqslant \lambda]}) \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{X}{\lambda}\right)$$

   soit finalement :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Correction de l'exercice 36-2

1. X est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{n}{2t}$$

2. (b) X prend un nombre fini de valeurs, donc e^{uX} aussi et, d'après le théorème de transfert (la fonction $k \mapsto \mathrm{e}^{tk}$ est bien définie sur $[\![0,n]\!] = X(\Omega)$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{uX}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{uk}\, \mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{uk} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^u)^k\end{aligned}$$

d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{uX}) = \frac{(\mathrm{e}^u + 1)^n}{2^n}$$

(b) Notons tout d'abord que, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et u étant strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) = \mathbb{P}(uX \geqslant ut) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{uX} \geqslant \mathrm{e}^{ut})$$

De plus e^{uX} est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov et le résultat précédent, comme $\mathrm{e}^{ut} > 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{(\mathrm{e}^u + 1)^n}{2^n \mathrm{e}^{ut}}$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-ut}}{2^n} (\mathrm{e}^u + 1)^n$$

Correction de l'exercice 36-3

X suit une loi binomiale, donc elle admet une variance. On a donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{np\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}p\,(1-p) &= p - p^2\\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - p\right)^2\\ &\leqslant \frac{1}{4}\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|X - np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{n}{4\varepsilon^2}$$

Correction de l'exercice 36-4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nX_n admet une espérance et une variance car elle suit une loi binomiale, donc X_n admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{\mathbb{E}(nX_n)}{n} = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{\mathbb{V}(nX_n)}{n^2} = \frac{p\,(1-p)}{n}$$

On a donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et comme une probabilité est toujours positive :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{P}(|X_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Or on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - p| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Ainsi la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p.

Correction de l'exercice 36-5

1. (a) Par définition de la partie entière, on sait que :

$$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

donc :

$$x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$

et alors, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

(b) On a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \exp \lfloor nx \rfloor \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{\lambda}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

donc :

$$\lfloor nx \rfloor \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

d'où, avec le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \lfloor nx \rfloor \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$$

donc, la fonction exponentielle étant continue en $-\lambda x$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{X_n}{n}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) &= \mathbb{P}(X_n \leqslant nx)\\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}\end{aligned}$$

et donc, comme $1 - \dfrac{p}{n} \neq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) &= \frac{p}{n} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)}\\ &= 1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}\end{aligned}$$

Finalement, on a donc, d'après le résultat de la question 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Correction de l'exercice 36-6

1. Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$:

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(n), \text{ d'espérance } n \text{ et de variance } n}$$

2. On remarque donc, que, comme S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k)\\ &= \mathbb{P}(S_n \leqslant n)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right)\end{aligned}$$

De plus, comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance égale à 1 et une variance égale à 1, on a, d'après le théorème central limite :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et donc, comme la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est continue en 0 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \Phi(0) = \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 36-7

Comme X suit la loi de Poisson de paramètre λ, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{si } k \geqslant 0 \end{cases}$$

De plus, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_-^*,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n > k,\ \mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\,(np_n)^k (1-p_n)^{n-k}$$

De plus, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$$

et donc, la fonction $t \mapsto t^k$ étant continue en λ :

$$\lim_{n \to +\infty} (np_n)^k = \lambda^k$$

Par ailleurs, comme p_n appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-p_n)^{n-k} = \mathrm{e}^{(n-k)\ln(1-p_n)}$$

Or, comme la suite $(np_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers λ et comme $\lambda \neq 0$, on a :

$$np_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda$$

d'où :

$$p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$

En particulier, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$$

et donc :

$$\ln(1-p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -p_n$$

d'où :

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\lambda$$

et donc, la fonction exponentielle étant continue en $-\lambda$:

$$\lim_{n \to +\infty} (1-p_n)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

On a donc finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

ce qui nous permet de conclure que : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Correction de l'exercice 36-8

1. On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à a. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

Comme F est continue en tout point x_0 différent de a et comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers a, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = F(x) \tag{36.1}$$

Soient alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(|X_n - a| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}([X_n - a \geqslant \varepsilon] \cup [X_n - a \leqslant -\varepsilon])$$

et comme les événements $[X_n - a \geqslant \varepsilon]$ et $[X_n - a \leqslant -\varepsilon]$ sont incompatibles (car $\varepsilon > 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - a| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n - a \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n - a \leqslant -\varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_n \geqslant a + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leqslant a - \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n < a + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leqslant a - \varepsilon) \end{aligned} \tag{36.2}$$

De plus, comme $a - \varepsilon < a$, on a déjà :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant a - \varepsilon) = F(a - \varepsilon) = 0$$

Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\Big[X_n \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}\Big] \subset [X_n < a + \varepsilon] \subset [X_n \leqslant a + \varepsilon]$$

donc :

$$\mathbb{P}\Big(X_n \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \mathbb{P}(X_n < a + \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_n \leqslant a + \varepsilon)$$

et donc, d'après (36.1) (avec $a + \varepsilon > a$ et $a + \dfrac{\varepsilon}{2} > a$) et le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n < a + \varepsilon) = 1$$

et donc, d'après (36.2) :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| \geqslant \varepsilon) = 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a}$$

2. (a) Comme la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est formée de variables aléatoires suivant toutes la même loi, on a naturellement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$$

et donc :

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Comme X_n et X_1 ne prennent que les valeurs 0 et 1, $|X_n - X_1|$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et :

$$\begin{aligned} [|X_n - X_1| > \varepsilon] &= [|X_n - X_1| = 1] \\ &= ([X_n = 1] \cap X_1 = 0]) \cup ([X_n = 0] \cap [X_1 = 1]) \end{aligned}$$

et alors, les événements $[X_n = 1] \cap X_1 = 0]$ et $[X_n = 0] \cap [X_1 = 1]$ étant disjoints et les variables aléatoires X_n et X_1 étant indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p :

$$\mathbb{P}(|X_n - X_1| > \varepsilon) = 2pq$$

d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X_1| > \varepsilon) = 2pq \neq 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Non}}$$

Sommaire