35 Variables aléatoires à densité

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies.

A. Définition et premières propriétés

A.1. Fonction de répartition

Définition 35.1

On appelle **variable aléatoire à densité** toute variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Remarque Si X est une variable aléatoire à densité, $X(\Omega)$ est infini non dénombrable. En pratique, pour les variables aléatoires à densité, il est rare que l'on cherche à déterminer précisément $X(\Omega)$.

Proposition 35.2

Si X est une variable aléatoire à densité, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) = 0$.

Preuve Supposons que X soit une variable aléatoire à densité. On sait (*cf.* chapitre 28. Généralités sur les variables et vecteurs aléatoires) que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X < x)\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x) - \lim_{t \to x^-} \mathbb{P}(X \leqslant t)\end{aligned}$$

De plus, comme la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{t \to x^-} \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$$

□

Remarque Par conséquent, si X est une variable aléatoire à densité, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}(X > x)$$

Proposition 35.3

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

i. F est continue sur $\mathbb{R}$,

ii. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points,

iii. F est croissante sur $\mathbb{R}$,

iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Exercice 35.1 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

Prouver que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Remarques

a. Si on sait déjà que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire, il suffit de prouver les points *i* et *ii* pour prouver que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

b. Quand on doit déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, il est donc nécessaire que celle-ci vérifie les points précédents. Par conséquent, une fois cette fonction trouvée, il peut donc être utile de s'assurer au brouillon que celle-ci est bien continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points, et qu'elle tend bien vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$ pour s'assurer de la vraisemblance du résultat.

A.2. Densité

Définition 35.4

Si X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X, on appelle densité de X toute fonction f_X définie et positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f_X(x) = F_X'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Remarques

a. Si X est une variable aléatoire à densité, elle admet plusieurs densités (et même une infinité). En effet, si f est une densité de X, il suffit de changer la valeur de f en un point (du moment que l'on donne une image positive) pour obtenir une autre densité de X. Il convient donc de parler d'une densité et non de la densité de X. Toutefois, on remarquera que deux densités d'une même variable aléatoire ne diffèrent entre elles qu'en un nombre fini de points.

b. Quand F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, on choisit en général $f_X = F_X'$. Il arrive dans ce cas que l'on parle de la densité de X.

Exercice 35.2 Soit X une variable aléatoire à densité admettant pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

Déterminer une densité de X.

Proposition 35.5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est une densité de probabilité si et seulement si :

i. f est positive sur $\mathbb{R}$,

ii. f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points,

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 35.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

Remarques

a. Attention, une densité de probabilité n'est pas nécessairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, comme le prouve l'exercice précédent.

b. Comme le montre l'exemple précédent également, si on veut prouver que f est une densité de probabilité, il ne faut pas oublier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est certes impropre en $-\infty$ et $+\infty$, mais elle peut également avoir d'autres problèmes de convergence.

c. Si on veut montrer que f est une densité de probabilité et si f n'est pas continue en a, il n'est pas nécessaire de chercher ses limites éventuelles en a à gauche et en a à droite.

d. Quand on doit déterminer une densité d'une variable aléatoire à densité, il est donc nécessaire que celle-ci vérifie les points précédents. Par conséquent, une fois cette fonction trouvée, il peut être utile de s'assurer au brouillon que celle-ci est bien positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Proposition 35.6

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f_X, alors :

i. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

ii. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geqslant x) = 1 - F_X(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

iii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ /\ a < b,\ \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

Remarque D'après 35.2, on a donc plus généralement, si (a, b) est un couple de réels tel que $a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 35.7

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f_X, alors :

$$f_x(x) = F'_X(x) \text{ pour tout réel } x \text{ en lequel } f_X \text{ est continue}$$

Preuve Soit X une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F et dont une densité est f. Soit x_0 un point en lequel f est continue. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f soit continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. On a alors, d'après la relation de Chasles :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_0-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0-\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, comme f est continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0-\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en est une primitive sur cet intervalle, donc y est dérivable.

Ainsi, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t$ est indépendant de x, F_X est dérivable en x_0 et : $F'_X(x_0) = f(x_0)$.

□

Remarques

a. En particulier, si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction de répartition F_X de X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $f'_X = f_X$.

b. Si X est une variable aléatoire à densité, toute densité de X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de point donc, si f_X est une densité de X, il existe un ensemble fini E tel que F_X soit dérivable sur $\mathbb{R} \setminus E$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus E,\ F'_X(x) = f_X(x)$$

A.3. Exemples simples de fonctions de variables aléatoires à densité

Théorème 35.8

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X. Pour tout couple (a, b) de réels tel que $a \neq 0$, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Exercice 35.4 Démontrer le théorème 35.8.

Théorème 35.9

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X.
Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas, alors $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} f_X \circ \varphi^{-1}(y) \times \left|(\varphi^{-1})'(y)\right| & \text{si } y \in Y(\Omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque À propos des fonctions de variables aléatoires à densité, le programme stipule « les candidats devront savoir calculer la fonction de répartition et [une] densité de $aX + b$ [et] devront savoir retrouver les lois de X^2 et $\varphi(X)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $X(\Omega)$ ». Plus que le résultat, il est donc essentiel de parfaitement en maîtriser la démonstration.

Preuve Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives de X et Y. Pour plus de simplicité, on suppose que $X(\Omega) =]a, b[= I$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que φ' est strictement positive sur I. Compte tenu des hypothèses, Y est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et φ est une bijection strictement croissante de $X(\Omega)$ sur $Y(\Omega)$ donc $Y(\Omega)$ est l'intervalle ouvert $J =]\alpha, \beta[$ dont les extrémités sont :

$$\alpha = \lim_{x \to a^+} \varphi(x) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x \to b^-} \varphi(x)$$

De plus φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Par ailleurs, on a, φ^{-1} étant strictement croissante :

$$\forall y \in J,\ [Y \leqslant y] = [X \leqslant \varphi^{-1}(y)]$$

et, si α et/ou β est fini :

$$\forall y \leqslant \alpha,\ [Y \leqslant y] = \varnothing \quad \text{et} \quad \forall y \geqslant \beta,\ [Y \leqslant y] = \Omega.$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on en déduit que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ [Y \leqslant y] \in \mathcal{A}$$

donc Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et on a :

$$\forall y \in J,\ F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leqslant \varphi^{-1}(y)) = F_X \circ \varphi^{-1}(y)$$

et, si α et/ou β est fini :

$$\forall y \leqslant \alpha,\ F_Y(y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \geqslant \beta,\ F_Y(y) = 1$$

Or, comme X est une variable aléatoire à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus E$ où E est un ensemble fini. Par conséquent, comme φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, F_Y est continue sur J (et on montrerait simplement que, si α est réel, F_Y est continue et nulle en α et que, si β est fini, F_Y est continue et égale à 1 en β) donc sur $\mathbb{R}$. De même, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J privé de E' où $E' = \{y \in J \ / \ \varphi^{-1}(y) \in E\}$ est fini.
Finalement, Y est donc une variable aléatoire à densité, dont une densité est obtenue en dérivant F_Y en tout point de dérivabilité et en prenant une valeur positive arbitraire en tout autre point,

donc par exemple la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} f_X \circ \varphi^{-1}(y) \times \left|(\varphi^{-1})'(y)\right| & \text{si } y \in Y(\Omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Remarque On pourra retenir en particulier le résultat suivant :

Proposition 35.10

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité, de densité f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

B. Moments d'une variable aléatoire à densité

B.1. Espérance

Définition 35.11

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On dit que X admet une **espérance** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque l'espérance de X est nulle, on dit que X est une variable aléatoire centrée.

Exercice 35.5 Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 35.6 Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

Étudier l'existence de l'espérance de X.

Proposition 35.12

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors :

i. si X est une variable aléatoire positive, alors : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance),

ii. pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b \text{ (linéarité de l'espérance)}$$

B.2. Théorème de transfert

Théorème 35.13 ▶ Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On suppose que $X(\Omega)$ est un intervalle d'extrémités a et b telles que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Si φ est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et continue sur $X(\Omega)$ éventuellement privé d'un ensemble fini, alors $Y = \varphi \circ X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve On démontre ce théorème dans le cas où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $X(\Omega)$ et φ' est strictement positive sur I. D'après le théorème 35.9, on sait déjà que, dans ce cas, Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} f_X \circ \varphi^{-1}(y)(\varphi^{-1})'(y) & \text{si } y \in Y(\Omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note alors :

$$\alpha = \lim_{t \to a^+} \varphi(t) \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{t \to b^-} \varphi(t).$$

On peut alors écrire que Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta y f_Y(y)\,\mathrm{d}y$, c'est-à-dire l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\, f_X \circ \varphi^{-1}(y)\,(\varphi^{-1})'(y)\,\mathrm{d}y$ est (absolument) convergente. Comme φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$, on en déduit, en effectuant le changement de variable $t = \varphi^{-1}(y)$, $\mathrm{d}t = (\varphi^{-1})'(y)\,\mathrm{d}y$, que $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est (absolument) convergente et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarques

a. Attention, le théorème de transfert ne garantit pas l'existence de l'espérance de $\varphi \circ X$. Pour l'utiliser, il s'agira donc toujours de justifier son existence, soit avec la définition (si on connaît une densité de $\varphi \circ X$, soit en prouvant l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Dans ce théorème, il est fondamental de ne pas oublier l'absolue convergence, qui n'équivaut en général pas à la convergence simple dans ce cas.

c. On pourra remarquer que ce résultat implique l'équivalence entre l'existence de l'espérance de X et de celle de $|X|$.

B.3. Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 35.14

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** si X^r admet une espérance (c'est-à-dire, d'après le théorème de transfert, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente). Dans ce cas le moment d'ordre r, noté $m_r(X)$ est défini par :

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Comme f_X est une densité de probabilité, elle est positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto t^r f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,dt$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.

Exercice 35.7 Soit X une variable aléatoire à densité et r un entier naturel non nul. On suppose que X admet un moment d'ordre r. Montrer que, pour tout $p \in [\![1, r]\!]$, X admet un moment d'ordre p.

B.4. Variance. Écart-type

Définition 35.15

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On dit que X admet une **variance** si X admet une espérance et si $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas, la variance de X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Si X admet une variance, on appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Lorsque la variance de X est égale à 1, on dit que X est une variable aléatoire réduite.

Remarques

a. De même que pour l'espérance, on retiendra qu'une variable aléatoire peut ne pas admettre de variance et qu'il est donc fondamental d'en prouver l'existence avant d'envisager de la calculer.

b. Se souvenir que, par définition de la variance, quand elle existe, est toujours positive.

c. Il est rare que la définition soit utile : pour calculer la variance d'une variable aléatoire à densité, quand elle existe, on utilise le plus souvent la proposition 35.17.

d. L'expression de $\mathbb{V}(X)$ sous forme d'intégrale est une conséquence immédiate du théorème de transfert.

Exercice 35.8 Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et une variance. Prouver que : $\mathbb{V}(X) > 0$.

Proposition 35.16

Soit X une variable aléatoire à densité.
X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.

Preuve ⋄ On suppose que X admet une variance et on note f une densité de X. Dans ce cas, X admet une espérance et les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. De plus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 f(t) = (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) + 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) - (\mathbb{E}(X))^2 f(t)$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc que X admet un moment d'ordre 2.

◇ Supposons que X admette un moment d'ordre 2. On a vu dans l'exercice 29.7 qu'alors X admet une espérance. Ainsi, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. De plus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) = t^2 f(t) - 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) + [\mathbb{E}(X)]^2 f(t)$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc que X admet une variance.

□

Proposition 35.17 ▶ Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire à densité.
Si X admet une variance, alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Preuve D'après 35.16, comme X admet une variance, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X)$ existent. Ainsi, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont toutes convergentes et, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(t^2 f(t) - 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) + [\mathbb{E}(X)]^2 f(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\,\mathbb{E}(X) \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t + [\mathbb{E}(X)]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \times 1 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2
\end{aligned}$$

□

Proposition 35.18

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$$

C. Lois usuelles

C.1. Loi uniforme sur un intervalle

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Proposition 35.19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une densité de probabilité.

Preuve f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, a[$, $]a, b[$ et $]b, +\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points). De plus, f étant continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{b-a} = 1$$

donc f est une densité de probabilité.

□

Définition 35.20

On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ (notée $\mathcal{U}([a, b])$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques

a. À la lecture d'un énoncé, attention à ne pas confondre loi uniforme à densité (sur un intervalle) et loi uniforme discrète (sur une partie finie de $\mathbb{Z}$).

b. On rappelle que, si E est une partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{1}_E$ désigne la fonction indicatrice de E, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Proposition 35.21

Si X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, alors sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Preuve Comme X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\forall x \in\ ]-\infty, a[\,,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t$$

et d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b]\,,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{b-a} \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall x \in\ ]b, +\infty[\,,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{b-a} + \int_b^x 0 \cdot \mathrm{d}t \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 35.22

Si X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 35.9 Démontrer la proposition 35.22.

Remarque Attention, si a et b sont deux entiers, si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$ et si Y suit la loi uniforme à densité sur $[a, b]$, X et Y admettent la même espérance mais pas la même variance.

Proposition 35.23

Si X est une variable aléatoire alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \iff a + (b-a)\,X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$$

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

C.2. Loi exponentielle

Dans cette partie, λ est un réel strictement positif.

Proposition 35.24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une densité de probabilité.

Preuve f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points). De plus, f étant nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature et valeur en cas de convergence. Par ailleurs, la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est continue et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, nous permettant finalement d'affirmer que f est une densité de probabilité.

□

Définition 35.25

On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ (notée $\mathcal{E}(\lambda)$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 35.26

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Remarque Les calculs ont été faits dans la preuve de 35.24.

Proposition 35.27

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 35.10 Démontrer la proposition 35.27.

Proposition 35.28

Si X est une variable aléatoire alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\,X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

b. En cas de doute sur la formule, il suffit de penser à vérifier à l'aide de la valeur de l'espérance.

Théorème 35.29 ▶ Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X > x) \neq 0$$

X suit la loi exponentielle si et seulement si sa loi est sans mémoire, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > y)$$

Exercice 35.11 On se propose de démontrer la proposition 35.29 et l'on considère une variable aléatoire à densité X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X > x) \neq 0$$

1. On suppose que X suit une loi exponentielle. Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > y)$$

2. Réciproquement, on suppose que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > y)$$

et on note G la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

(a) Justifier que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ G(x+y) = G(x)\,G(y)$$

(b) En déduire successivement que :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ G(n) = [G(1)]^n$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G\left(\dfrac{1}{n}\right) = [G(1)]^{\frac{1}{n}}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{Q},\ G(x) = [G(1)]^x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(x) = [G(1)]^x$.

(c) Conclure que X suit une loi exponentielle.

C.3. Loi normale

Dans cette partie, m est un réel et σ est un réel strictement positif.

Proposition 35.30

La fonction
$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$
est une densité de probabilité.

Remarque En particulier, dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$, on retiendra que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$$
La preuve de ce résultat fait l'objet d'un grand nombre d'exercices ou de problèmes de concours.

Définition 35.31

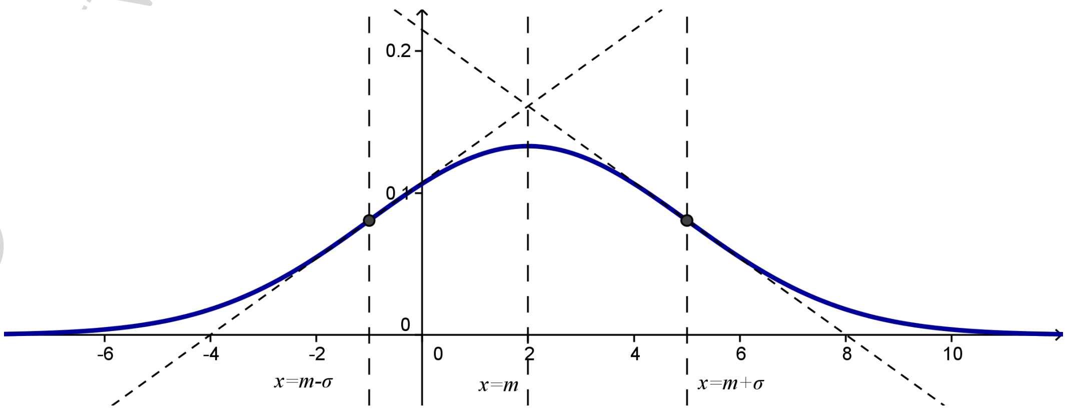
On dit que X suit la **loi normale** de paramètre m et σ^2 (notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$) si elle admet pour densité la fonction φ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Remarques

a. Une variable aléatoire suivant une loi normale est dite gaussienne.

b. Le graphe de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est une « courbe en cloche » qui admet :
- un axe de symétrie : la droite d'équation $x = m$,
- deux points d'inflexion : les points d'abscisses respectives $x - \sigma$ et $x + \sigma$.

Par exemple, pour $m = 2$ et $\sigma = 3$, le graphe de cette fonction est le suivant :



Proposition 35.32

Si X est une variable aléatoire :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \iff \sigma X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

b. En cas de doute sur la formule, il faut penser à vérifier à l'aide de la valeur de l'espérance.

Proposition 35.33

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En notant Φ sa fonction de répartition, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Preuve Comme X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

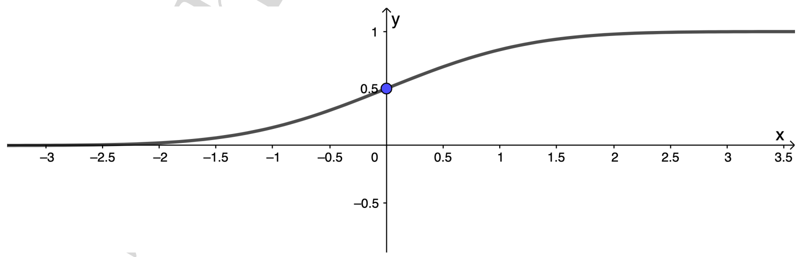
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

donc, en effectuant le changement de variable affine $u = -t$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) &= \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\ &= \mathbb{P}(X > x) \\ &= 1 - \Phi(x)\end{aligned}$$

□

Remarque Ainsi la courbe représentative de Φ dans un repère orthonormé admet pour centre de symétrie le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. L'allure de la courbe représentative de Φ est la suivante :



Proposition 35.34

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ^2, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

En particulier, si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, X est centrée et réduite ; dans ce cas, on dit donc que X suit la loi normale centrée réduite.

Exercice 35.12 Démontrer la proposition 35.34.

C.4. Loi gamma

Dans cette partie, ν est un réel strictement positif.

Proposition 35.35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une densité de probabilité.

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition de la fonction Γ.

b. Si l'on a en général le choix de la valeur attribuée à $f(0)$, il faut être vigilant dans le cas de la loi $\gamma(\nu)$ si ν appartient à $]0,1[$ (car dans ce cas la fonction $x \mapsto x^{\nu-1}$ a une limite infinie en 0 à droite.

Définition 35.36

On dit que X suit la **loi gamma** de paramètre ν (notée $\gamma(\nu)$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque On peut remarquer, et on retiendra, que la loi $\gamma(1)$ est aussi la loi $\mathcal{E}(1)$.

Proposition 35.37

Si X suit la loi gamma de paramètre ν, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \nu$$

Exercice 35.13 Démontrer la proposition 35.37.

C.5. Tableau récapitulatif des lois usuelles

Loi	**$X(\Omega)$ (usuel)**	**Densité usuelle**	**Espérance**	**Variance**
Uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$x \mapsto \dfrac{1}{b-a}\, \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
gamma $\gamma(\nu)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$	ν	ν
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	0	1
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

Remarque L'ensemble $X(\Omega)$ est donné ici à titre indicatif, et il serait en fait préférable de dire que X prend presque sûrement ses valeurs dans l'ensemble proposé : les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ étant toutes nulles, on ne change pas la loi de X en changeant une valeur particulière $X(\omega)$.

D. Familles de variables aléatoires à densité

D.1. Familles de variables aléatoires à densité indépendantes

Définition 35.38

On dit que deux variables aléatoires à densité X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y \leqslant y)$$

Définition 35.39

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à densité ($n \geqslant 2$), on dit que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i)$$

D.2. Somme de variables aléatoires à densité

Définition 35.40

Soit f et g deux densité de probabilité. On appelle **produit de convolution** de f et g la fonction $h = f \star g$ définie (sous réserve de convergence) par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques

a. La dernière égalité s'obtient par changement de variable affine $u = x - t$.

b. Si f ou f est bornée, alors $f \star g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini.

Théorème 35.41 ► Théorème de convolution

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes**, f_X une densité de X et f_Y une densité de Y.
Si le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini, alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Le plus souvent, le cadre d'application de ce théorème sera simple car l'une au moins des variables aléatoires X et Y admettra une densité bornée.
Cependant, il faut être vigilant dans la vérification des hypothèses car il peut arriver que cela ne soit pas le cas.

Proposition 35.42 ► Stabilité de la loi γ pour la somme

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant respectivement les lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $X + Y$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.
Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\gamma(\nu_1), \dots, \gamma(\nu_n)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \cdots + \nu_n)$.

Exercice 35.14 Démontrer la proposition 35.42.

Remarque On en déduit de manière immédiate le résultat suivant :

Proposition 35.43

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\gamma(n)$.

Proposition 35.44 ► Stabilité de la loi normale pour la somme

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant respectivement les lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors $X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \ldots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + \cdots m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.

Exercice 35.15 Démontrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi normale centrée réduite, alors $X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 2)$.

D.3. Propriétés de l'espérance et de la variance

Proposition 35.45

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité admettant une espérance, alors :

i. $X + Y$ admet une espérance et : $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance),

ii. si $X \leqslant Y$ p.s. alors : $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ (croissance de l'espérance).

Proposition 35.46

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité **indépendantes** admettant une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Proposition 35.47

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité **indépendantes** admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densité indépendantes admettant une variance, alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$$

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 35-1

F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car la fonction arctan l'est. De plus, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

et donc :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Enfin, la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$. Finalement, on peut donc affirmer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Correction de l'exercice 35-2

On a déjà vu dans l'exercice 29.1 que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. De plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$$

Correction de l'exercice 35-3

f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points). De plus, comme f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0. Par ailleurs, on sait que les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ sont convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{4\sqrt{t}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]_x^1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_x^1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui prouve que f est une densité de probabilité.

Correction de l'exercice 35-4

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a\neq 0$. Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$, c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, donc Y aussi.
De plus, on a :

$$\forall y\in\mathbb{R},\ [Y\leqslant y] = \begin{cases}\left[X\leqslant \dfrac{y-b}{a}\right] & \text{si } a>0\\[2ex] \left[X\geqslant \dfrac{y-b}{a}\right] & \text{si } a<0\end{cases}$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$, on en déduit que :

$$\forall y\in\mathbb{R},\ [Y\leqslant y]\in\mathcal{A}$$

donc Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Finalement, comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une partie finie, on en déduit que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une partie finie donc que Y est une variable aléatoire à densité, dont une densité peut être obtenue par dérivation de F_Y en tout point y de dérivabilité et en prenant une valeur arbitraire positive en tout autre point, donc en particulier on peut choisir la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ -\dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 35-5

X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{t}}{4} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On peut donc remarquer que la fonction $t \mapsto t f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui est la cas (on reconnaît une intégrale de Riemann). Ainsi, X admet une espérance et, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{4}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_0^1 + \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 35-6

On a vu dans l'exercice 29.2 que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$$

La fonction $t \mapsto t f(t)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$t f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente, on en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.

Correction de l'exercice 35-7

Soit $p \in [\![1, r]\!]$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |x|^p \leqslant |x|^r & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ |x|^p \leqslant 1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x|^p \leqslant |x|^r + 1$$

On a donc en particulier :

$$|X^p| \leqslant |X^r| + 1$$

Or X^r admet une espérance, donc $|X^r| + 1$ admet une espérance et, par domination, X admet un moment d'ordre p.

Correction de l'exercice 35-8

Notons f une densité de X. Comme X admet une variance, X admet une espérance m et on a :

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, f est une densité de probabilité donc l'ensemble E des points de discontinuité de f est fini. On note alors : $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, f n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R} \setminus E$ (sinon l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ serait nulle) et, comme f est positive sur $\mathbb{R}$, il existe x_0 appartenant à $\mathbb{R} \setminus E$ tel que : $f(x_0) > 0$. Comme f est continue en x_0, on peut alors affirmer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \ f(x) > 0$$

et, E étant fini, on peut même choisir α tel que :

$$[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap E = \varnothing$$

On a alors, d'après la relation de Chasles :

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{x_0-\alpha} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0+\alpha}^{+\infty} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme ces trois intégrales sont positives (par positivité de l'intégration, la fonction intégrée étant positive sur $\mathbb{R}$ et les bornes étant dans le sens croissant) :

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

et finalement, la fonction $t \mapsto (t-m)^2 f(t)$ étant continue, positive et non constante nulle sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$:

$$\mathbb{V}(X) \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (t-m)^2 f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Correction de l'exercice 35-9

Comme X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2\,(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{3\,(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que X admet une variance et que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 35-10

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en dehors, donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

et donc, comme $\lambda > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Finalement, X admet donc une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

De même, $\mathbb{E}(X^2)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + 2\int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et donc, comme $\lambda > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$. Finalement, X admet donc un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$$

Finalement, X admet donc une variance et :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Correction de l'exercice 35-11

1. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. X est alors une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et on a, d'après 35.26 :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X > x) &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

   On peut alors écrire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x+y])}{\mathbb{P}(X > x)}$$

   et comme $[X > x+y] \subset [X > x]$ si $y > 0$ (car $x+y > x$) :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) &= \frac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \\ &= \mathbb{P}(X > y)\end{aligned}$$

2. (a) De même que précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) &= \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x+y])}{\mathbb{P}(X > x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ &= \frac{G(x+y)}{G(x)}\end{aligned}$$

   et donc, d'après l'hypothèse d'absence de mémoire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ G(x+y) = G(x)\,G(y)$$

(b) • D'après le résultat précédent, on a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(n+1) = G(n)\,G(1)$$

donc la suite $(G(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $G(1)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(n+1) = [G(1)]^{n-1}G(1) = [G(1)]^n\,.$$

De plus, on a aussi :

$$G(0+0) = G(0)\,G(0)$$

et donc, comme $G(0) \neq 0$ (car G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car F est croissante) et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$G(0) = 1 = [G(1)]^0$$

donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G(n) = [G(1)]^n$$

• On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(1) = G\left(n \times \frac{1}{n}\right)$$

De plus, on montrerait par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(nx) = [G(x)]^n$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(1) = \left[G\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G\left(\frac{1}{n}\right) = [G(1)]^{\frac{1}{n}}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{Q}$. Il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $x = \dfrac{p}{q}$ et alors :

$$\begin{aligned} G(x) &= G\left(p \times \frac{1}{q}\right) \\ &= \left[G\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p \\ &= \left[(G(1))^{\frac{1}{q}}\right)^p \\ &= [G(1)]^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{Q},\ G(x) = [G(1)]^x$$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombre rationnels strictement positifs convergeant vers x (il suffit de poser $x_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$) et on a, d'après le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G(x_n) = [G(1)]^{x_n}$$

et alors, comme G est continue en x (car F est continue sur $\mathbb{R}$) :

$$G(x) = \lim_{n\to+\infty} [G(1)]^{x_n} = [G(1)]^x$$

et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(x) = [G(1)]^x$$

(c) D'après les résultats précédents, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ F(x) = 0$$

et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) &= 1 - G(x)\\ &= 1 - [G(1)]^x\end{aligned}$$

et comme $G(1) > 0$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) &= 1 - G(x)\\ &= 1 - \mathrm{e}^{x\ln(G(1))}\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\end{aligned}$$

où l'on a posé : $\lambda = -\ln(G(1))$ (qui est bien un réel strictement positif). Finalement, on peut donc conclure que X suit une loi exponentielle.

Correction de l'exercice 35-12

Compte tenu de la proposition 35.32 et des propriétés de l'espérance et de la variance, il suffit de démontrer le résultat dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$. Dans ce cas, X admet pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

La fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est alors une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$ donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que, dans ce cas, l'espérance est nulle. Or on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^3\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$$

d'où :

$$t\varphi(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, on en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit finalement que X admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto t^2\varphi(t)$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, donc X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x t \times (-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\,\mathrm{d}t$$

donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et donc, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\dfrac{1}{2}$ (car φ est une densité de probabilité paire) :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathbb{E}(X^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 1$$

et alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1$$

Correction de l'exercice 35-13

Comme X suit la loi $\gamma(\nu)$, elle admet pour densité la fonction f_ν définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\,t^{\nu-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ tf_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}\times\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,t^{\nu+1-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ t^2f_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)}\times\dfrac{1}{\Gamma(\nu+2)}\,t^{\nu+2-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ tf_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}\,f_{\nu+1}(t) \quad\text{et}\quad t^2f_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)}\,f_{\nu+2}(t)$$

Or, comme $f_{\nu+1}$ et $f_{\nu+2}$ sont des densités de probabilité, on sait que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\nu+1}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\nu+2}(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et valent 1. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_\nu(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f_\nu(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} = \nu \quad\text{et}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f_\nu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} = \nu\,(\nu+1)$$

Finalement, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \nu \quad\text{et}\quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \nu\,(\nu+1) - \nu^2 = \nu$$

Correction de l'exercice 35-14

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$. Elles admettent donc pour densités respectives les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu_1)}\,t^{\nu_1-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu_2)}\,t^{\nu_2-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que le théorème de convolution s'applique dans ce cas (*a priori* les densités f_1 et f_2 ne sont pas bornées). $X+Y$ est donc une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,f_2(x-t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$t < 0 \text{ ou } x - t < 0 \Rightarrow f_1(t)\, f_2(x-t) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ f(x) = 0$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)} \int_0^x t^{\nu_1-1}(x-t)^{\nu_2-1}\,\mathrm{d}t$$

et en effectuant le changement de variable affine $u = \dfrac{t}{x}$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{x}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 (xu)^{\nu_1-1}(x-xu)^{\nu_2-1}\,x\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{\nu_1+\nu_2-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{\nu_1+\nu_2-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}\ \underbrace{\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\,\mathrm{d}u}_{k}
\end{aligned}$$

En notant $f_{\nu_1+\nu_2}$ la densité usuelle de la loi $\gamma(\nu_1+\nu_2)$, on peut alors remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k\, f_{\nu_1+\nu_2}(x)$$

Or, comme f et $f_{\nu_1+\nu_2}$ sont deux densités de probabilités, on a aussi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\nu_1+\nu_2}(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

donc $k = 1$ et :

$$f = f_{\nu_1+\nu_2}$$

ce qui prouve que $X+Y$ suit la loi $\gamma(\nu_1+\nu_2)$.

Correction de l'exercice 35-15

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi normale centrée réduite. Elles admettant donc toutes deux pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t)\,\varphi(x-t) &= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2+(x-t)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{2t^2-2xt+x^2}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2}}_{g_x(t)}
\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, g_x est une densité de probabilité (de la loi normale $\mathcal{N}\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, ce qui nous permet d'affirmer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ est une densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,2)$, on en déduit finalement, d'après le théorème de convolution, que $X+Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,2)$.

Sommaire