34 Compléments sur les variables aléatoires réelles

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

Dans tout ce chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies. Pour toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$, on note :

- $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$ pour tout réel x,
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > x\}$ pour tout réel x,
- $[X \in I] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\}$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$,
- ...

A. Généralités

A.1. Notion de variable aléatoire réelle

Définition 34.1

On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ appartient à $\mathcal{A}$ (*i.e.* est un événement).

Remarque On peut remarquer que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union et intersection finies d'ensembles de la forme $]-\infty, x]$ et de leurs complémentaires. On peut par exemple remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ]-\infty, x[= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{k}\right]$$

Les propriétés de l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements assurent donc que, si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $[X \in I]$ est un événement pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Proposition 34.2

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors :

- pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- $X_1 X_2 \cdots X_n$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- l'application $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- l'application $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarques

a. Le programme stipulant clairement que « le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un des objectifs du programme », nous nous passerons de démontrer ces résultats.

b. Dans la suite, toutes les variables aléatoires envisagées sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

A.2. Loi d'une variable aléatoire réelle

Définition 34.3

Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de X la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarque Si X est une variable aléatoire discrète et si I est un intervalle, $I \cap X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, donc l'événement $[X \in I]$ est la réunion au plus dénombrable des événements de la forme $[X = x]$ où $x \in I \cap X(\Omega)$. La σ-addititivité de $\mathbb{P}$ garantit alors que la connaissance des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ permet de déterminer $\mathbb{P}(X \in I)$ et donc la loi de X : on dit que la loi de X est caractérisée par la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Définition 34.4

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Proposition 34.5

Si X est une variable aléatoire et F_X est sa fonction de répartition, alors :

i. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,

ii. F_X tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Exercice 34.1 On se propose de démontrer la proposition 34.5.

1. Prouver que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Justifier que :

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

   (b) En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

3. Démontrer de même que :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

Proposition 34.6

Soit X une variable aléatoire, F_X est sa fonction de répartition. Pour tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$, on a :

i. $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$

ii. $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

iii. $\mathbb{P}(X < a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

iv. $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

v. $\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

vi. $\mathbb{P}(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$

vii. $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

Exercice 34.2 On se propose de démontrer la proposition 34.6.

1. Prouver les égalités *i* et *ii*.

2. (a) Justifier que :

$$[X < a] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

(b) En déduire l'égalité *iii*.

3. Démontrer les égalités *iv* à *vii*.

Remarque Une conséquence immédiate et fondamentale de ces résultats est :

Théorème 34.7

La loi d'une variable aléatoire X est caractérisée par sa fonction de répartition.

Proposition 34.8

Si X est une variable aléatoire et F_X est sa fonction de répartition, alors :

i. F_X est continue à droite en tout point,

ii. F_X est continue en tout point a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Exercice 34.3 On se propose de démontrer la proposition 34.8.

1. (a) Justifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ [X \leqslant a] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

(b) En déduire que F_X est continue à droite en tout point.

2. Justifier alors que F_X est continue en tout point x tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.

B. Familles de variables aléatoires réelles

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

B.1. Loi d'un vecteur aléatoire

Définition 34.9

On appelle vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tout n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles. Si de plus $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes, on dit que le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire discret.

Définition 34.10

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- On appelle loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ la donnée de la fonction $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right)$$

- Les lois de $X_1, \ldots, X_n$ sont appelées lois marginales du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$.

Théorème 34.11

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est un vecteurs aléatoire discret, sa loi est caractérisée par la donnée des probabilités

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right)$$

pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ appartenant à $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$.

Théorème 34.12

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ deux vecteurs aléatoires.
Si $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ ont la même loi alors, pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $g(X_1,\dots,X_n)$ et $g(Y_1,\dots,Y_n)$ ont la même loi.

Remarque Attention, pour appliquer ce théorème, il est fondamental que les **vecteurs** $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ aient la même loi, et pas seulement que les variables aléatoires X_i et Y_i aient la même loi pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Par exemple, si l'on considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$, si on pose $Y_1=Y_2=X_1$ et si l'on considère la fonction $g:(x,y)\mapsto xy$, alors on peut remarquer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g(X_1,X_2)=1) &= \mathbb{P}(X_1X_2=1)\\ &= \mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=1])\end{aligned}$$

donc, comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g(X_1,X_2)=1) &= \mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=1)\\ &= p^2\end{aligned}$$

tandis que, comme $Y_1=Y_2=X_1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g(Y_1,Y_2)=1) &= \mathbb{P}([Y_1=1]\cap[Y_2=1])\\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\\ &= p\end{aligned}$$

B.2. Variables aléatoires indépendantes

Dans toute la suite, $(X_1,\dots,X_n)$ désigne un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 34.13

On dit que $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x_k)$$

Théorème 34.14

$X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si on a, pour tous intervalles $I_1,\dots,I_n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\in I_k]\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k\in I_k)$$

Théorème 34.15

Si $(X_1, \dots, X_n)$ un un vecteur aléatoire discret, alors $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_k)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Proposition 34.16 ▶ Lemme des coalitions

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et si p est un entier tel que $2 \leqslant p \leqslant n-1$, alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, \dots, X_n$.
Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors, pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ et pour toute famille $(i_1, \dots, i_p)$ d'entiers vérifiant $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$, toute famille de variables aléatoires de la forme $(f_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i_1)}), \dots, f_p(X_{\sigma(i_{p-1}+1)}, \dots, X_{\sigma(i_p)}))$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Exemple 34.1 Si X, Y, Z, T sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors :

- $X + Y$ et $Z + T$ sont indépendantes,
- $X + Z + T$ et Y sont indépendantes,
- X et YZT sont indépendantes,
- $X, Y, Z + T$ sont mutuellement indépendantes.

B.3. Propriétés de l'espérance

Théorème 34.17 ▶ Linéarité de l'espérance

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une espérance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

Remarque La définition de l'espérance d'une variable aléatoire n'étant pas au programme (ce n'est le cas que pour une variable aléatoire discrète ou à densité), on comprendra l'absence de difficulté technique sur ces points aux concours, les notions envisagées dans cde paragraphe ne faisant que prolonger celles déjà vues dans le cas de variables aléatoires discrètes.

Théorème 34.18 ▶ Croissance de l'espérance

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une espérance.
Si, presque sûrement, $X \leqslant Y$, alors : $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 34.19 ▶ Théorème de domination

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que, presque sûrement, $|X| \leqslant Y$.
Si Y admet une espérance, alors X admet une espérance et :

$$|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$$

Exercice 34.4 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives admettant une espérance.
Prouver que $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ admettent une espérance.

Théorème 34.20

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent une espérance, alors $X_1 X_2 \cdots X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

Exercice 34.5 Dans cet exercice, p désigne un élément de $]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = 1) = p$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

   (a) Calculer l'espérance de Y_n.

   (b) En déduire la loi de Y_n.

B.4. Covariance d'un couple de variables aléatoires réelles

Dans tout ce paragraphe, (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Le lecteur est renvoyé au chapitre 28 s'il souhaite une démonstration des résultats (preuves analogues dans le cas discret et dans le cas général).

Théorème 34.21

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

Définition 34.22

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, on appelle **covariance** de (X, Y) le réel

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Remarques

a. D'après 34.21, si X et Y admettent un moment d'ordre 2, XY, X et Y admettent une espérance, donc la covariance de (X, Y) est bien définie.

b. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, on a : $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

c. Compte tenu de la définition, on peut dire que, si $\operatorname{Cov}(X, Y) > 0$, alors, en moyenne, quand X augmente, Y augmente également, tandis que, si $\operatorname{Cov}(X, Y) < 0$, alors, en moyenne, quand X augmente, Y diminue. En revanche, s'il est possible d'interpréter le signe de la covariance, il n'est pas possible d'interpréter sa valeur. En effet, on verra plus loin que si (X, Y) admet une covariance, alors $\operatorname{Cov}(aX, Y) = a \operatorname{Cov}(X, Y)$, donc la valeur de la covariance est fortement influencée par les valeurs prises par chacune des deux variables aléatoires X et Y individuellement.

d. De même que pour la variance, il est rare que la définition soit utilisée pour le calcul d'une covariance. En pratique, on utilisera le plus souvent la formule suivante :

Théorème 34.23 ▶ Formule de Huygens

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Proposition 34.24

La covariance est une forme bilinéaire symétrique et positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant un moment d'ordre 2.
Autrement dit, si X, Y et Z sont trois variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2 et si a et b sont deux réels, alors on a :

i. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$,
ii. $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\,\text{Cov}(X, Z) + b\,\text{Cov}(Y, Z)$,
iii. $\text{Cov}(X, aY + bZ) = a\,\text{Cov}(X, Y) + b\,\text{Cov}(X, Z)$,
iv. $\text{Cov}(X, X) \geqslant 0$.

Définition 34.25

Si X et Y admettent toutes deux une variance non nulle, on appelle **coefficient de corrélation linéaire** de (X, Y) le réel

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

Remarque On a vu précédemment que, si le signe de la covariance est interprétable, sa valeur l'est beaucoup moins car l'ordre de grandeur des valeurs prises par X et Y influe fortement sur la valeur de la covariance. C'est pour cette raison que l'on introduit la notion de coefficient de corrélation linéaire : en divisant par les écart-types de X et de Y, on normalise ainsi la covariance, ce qui permet ensuite de comparer des valeurs de manière plus significative. En effet, on peut remarquer que :

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}\left(\frac{X}{\sigma(X)}, \frac{Y}{\sigma(Y)}\right)$$

Comme les variables aléatoires $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ et $\dfrac{Y}{\sigma(Y)}$ sont réduites, la valeur de leur covariance est moins impacté par les variations individuelles de X et de Y et il devient plus intéressant de comparer les valeurs des coefficients de corrélation linéaire de deux couples (X, Y) et (X', Y').

Proposition 34.26

Si X et Y admettent chacune une variance non nulle, alors :

i. $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$ (inégalité de Cauchy-Schwarz),
ii. $|\rho(X, Y)| = 1 \iff \exists\,(a, b) \in \mathbb{R}\ /\ \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$.

Remarque S'il existe un triplet (a, b, c) de réels tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $\mathbb{P}(aX + bY + c = 0) = 1$, on dit qu'il existe une relation presque sûrement affine entre les variables aléatoires X et Y. Cette relation sera dite affine lorsque $aX + bY + c = 0$.

Théorème 34.27

Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$$

Proposition 34.28

Si X et Y admettent chacune une variance non nulle, alors :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow \rho(X, Y) = 0$$

Remarques **a.** Attention, la réciproque est fausse en général, comme le prouvent les exercices 26.6 et 26.10.

b. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et telles que $\rho(X, Y) = 0$ ou $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées** (ce qui signifie bien que, s'il existe, le coefficient de corrélation linéaire est nul).

B.5. Propriétés de la variance

Proposition 34.29

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. $X+Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Remarques

a. Avant de calculer la variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes, ils est fondamental de se demander si les deux variables aléatoires sont indépendantes. À défaut, il faudra calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

b. On en déduit une autre formule permettant parfois de calculer la covariance :

Théorème 34.30

i. Si (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes admettant une variance, $X+Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

ii. Plus généralement, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes admettant une variance, alors, pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n$ de réels :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\ \mathbb{V}(X_k)$$

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 34-1

1. Soit (a, b) un couple de réels tel que $a \leqslant b$. On a :

$$[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$$

donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant b)$$

soit encore :

$$F_X(a) \leqslant> F_X(b)$$

ce qui prouve que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Par définition de Ω, on a évidemment :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n] \subset \Omega$$

Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$. Comme $X(\omega)$ est un réel, on a, en notant $n_\omega = \lfloor X(\omega) \rfloor + 1$:

$$X(\omega) \leqslant n_\omega$$

d'où :

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

Il en découle :

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

(b) On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [X \leqslant n] \subset [X \leqslant n+1]$$

donc, d'après le théorème de la limite monotone et le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n)$$

d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(n) = 1$$

Il est malheureusement trop tôt pour conclure (n tend ici vers $+\infty$ par valeurs entières uniquement). Par ailleurs, F_X étant croissante, le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite (finie ou infinie) pour F_X en $+\infty$. Par composition, on a alors nécessairement :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = 1$$

3. On a de même :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant -n] = \varnothing$$

d'où, comme la suite $([X \leqslant -n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante :

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par ailleurs, F_X admet aussi une limite en $-\infty$ (car elle est croissante), donc nécessairement :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = 0$$

Correction de l'exercice 34-2

1. ► On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > a) &= \mathbb{P}(\overline{[X \leqslant a]}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) \\ &= 1 - F_X(a)\end{aligned}$$

► On a également :

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}([X \leqslant b] \cap \overline{[X \leqslant a]})$$

donc, d'après la formule des probabilités totales, comme $([X \leqslant a], \overline{[X \leqslant a]})$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}([X \leqslant b] \cap [X \leqslant a])$$

d'où, comme $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X \leqslant b) &= \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a) \\ &= F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant a$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \subset [X < a]$$

d'où :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \subset [X < a]$$

Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) < a$. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) = a$$

donc, par définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ X(\omega) \leqslant a - \frac{1}{n}$$

d'où :

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

On en déduit :

$$[X < a] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

donc finalement :

$$[X < a] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

(b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant a - \frac{1}{n+1}$$

donc, d'après le résultat de la question précédente et le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(X < a) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(X \leqslant a - \frac{1}{n}\right)$$

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, comme F_X est croissante sur $]-\infty, a[$ elle a une limite en a à gauche, d'où :

$$\mathbb{P}(X < a) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

3. ▶ De même que pour le point *ii*, on a :

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X < a)$$

donc, d'après *iii* :

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

▶ On a de la même façon :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leqslant X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)\\ &= \lim_{x \to b^-} F_X(x) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)\end{aligned}$$

▶ Encore une fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)\\ &= \lim_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)\end{aligned}$$

▶ Enfin on a de même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = a) &= \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant a)\\ &= F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 34-3

1. (b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a \leqslant a + \frac{1}{n}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [X \leqslant a] \subset \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

d'où :

$$[X \leqslant a] \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$$

donc, par prolongement des inégalités (on fait tendre n vers $+\infty$) :

$$X(\omega) \leqslant a$$

d'où :

$$\omega \in [X \leqslant a]$$

On en déduit :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right] \subset [X \leqslant a]$$

donc finalement :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ [X \leqslant a] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[X \leqslant a + \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

donc, par croissance de la probabilité $\mathbb{P}$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$$

Enfin, comme F_X est croissante sur $]a, +\infty[$, le théorème de la limite monotone assure que F_X admet une limite en a à droite, ce qui entraîne, avec l'égalité précédente :

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{x \to a^+} F_X(x)$$

Ainsi F_X est continue à droite en tout point.

2. On a vu que :

$$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < a)$$

Comme $\mathbb{P}(X = a) = 0$, on a donc :

$$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F_X(a)$$

ce qui prouve que F_X est continue à gauche en tout point a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0$, nous permettant de conclure avec le résultat de la question précédente.

Correction de l'exercice 34-4

Comme X et Y sont positives, on a :

$$0 \leqslant \min(X, Y) \leqslant X + Y \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \max(X, Y) \leqslant X + Y$$

Or X et Y admettent une espérance, donc $X + Y$ également, ce qui nous permet de conclure avec le théorème de domination.

Correction de l'exercice 34-5

1. ► Comme X_n prend un nombre fini de valeurs (-1 et 1), X_n admet une espérance et une variance et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= -\mathbb{P}(X_n = -1) + \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= -\left[1 - \mathbb{P}(X_n = 1)\right] + \mathbb{P}(X_n = 1)\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 2p - 1}$$

► Comme X_n ne prend que les valeurs -1 et 1, X_n^2 est constante égale à 1 et on a :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 1$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2\\ &= 1 - (1-2p)^2\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = 4p\,(1-p)}$$

2. (a) Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettent une espérance, Y_n admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = (2p-1)^n}$$

(b) On peut déjà remarquer que, comme $X_1, \ldots, X_n$ ne prennent que les valeurs -1 et 1, Y_n ne prend que les valeurs -1 et 1. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= -\mathbb{P}(Y_n = -1) + \mathbb{P}(Y_n = 1)\\ &= 2\,\mathbb{P}(Y_n = 1) - 1\end{aligned}$$

donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$2\,\mathbb{P}(Y_n = 1) - 1 = (2p-1)^n$$

et donc :

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{(2p-1)^n + 1}{2}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l}Y_n \text{ prend ses valeurs dans } \{-1, 1\} \text{ et sa loi est caractérisée par :}\\[1ex] \mathbb{P}(Y_n = 1) = \dfrac{(2p-1)^n + 1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = \dfrac{1 - (2p-1)^n}{2}\end{array}}$$

Sommaire