31 Probabilités sur un ensemble quelconque

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Expérience aléatoire. Événements

A.1. Expérience aléatoire. Univers des possibles

L'objet de ce chapitre est d'étudier les expériences dont le résultat est lié au hasard, aussi appelées **expériences aléatoires**. Plus précisément, on dit qu'une expérience est aléatoire si l'on ne peut pas *a priori* prévoir son résultat et si l'on peut la reproduire dans des conditions identiques (par exemple, lancer une pièce, un dé, tirer une carte dans un jeu, lancer une flèche sur une cible, attendre d'être servi à un guichet de la poste...) au moins en théorie.

Étant donné une expérience aléatoire $\mathscr{E}$, l'ensemble des résultats possibles est appelé **univers des possibles**. Il est en général noté Ω et ses éléments, appelés **résultats**, sont en général notés ω.

Par exemple, si l'expérience consiste à jeter successivement deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, les résultats possibles sont des couples de nombres entiers compris entre 1 et 6 et il est raisonnable de définir l'univers des possibles comme $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$, le premier élément donnant le résultat du premier lancer et le second élément le résultat du second lancer. Par exemple, le couple $(1,3)$ est associé au résultat « obtenir 1 au premier lancer et 3 au deuxième » ; il serait également possible de choisir $\Omega = \{a,b,c,d,e,f\} \times \{a,b,c,d,e,f\}$, mais cela n'est ni pratique, ni réellement judicieux.

De même, si l'expérience consiste à effectuer une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, un résultat est une suite de « pile » ou « face » et l'on peut choisir comme ensemble Ω l'ensemble des suites $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont les éléments ω_k sont P ou F, ou encore l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles dont les éléments sont tous égaux à 0 ou à 1 (0 codant par exemple pour « pile » et 1 pour « face »).

Enfin, si l'expérience consiste à lancer une fléchette sur une cible circulaire de centre O et de rayon 1, on peut s'intéresser à la distance entre le point d'impact et le centre O de la cible. L'univers des possibles est alors l'ensemble $\Omega = [0,1]$.

A.2. Événements. Opérations sur les événements

Si l'on réalise une expérience aléatoire $\mathscr{E}$, un **événement** est un énoncé ou une proposition logique (par exemple « obtenir un résultat par » dans un lancer de dé cubique usuel). On dira que l'événement est réalisé ou non selon que la proposition s'avère vraie ou fausse une fois l'expérience réalisée.

Mathématiquement, une fois défini l'univers des possibles Ω associé à une expérience aléatoire $\mathscr{E}$, un événement pourra être représenté par l'ensemble des résultats qui le réalisent. Par exemple, si l'expérience consiste à lancer successivement deux dési cubiques usuels, l'événement « le plus grand numéro obtenu est 3 » peut être identifié à l'ensemble :

$$\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}.$$

Un événement qui s'identifie à un singleton (*i.e.* qui n'est réalisé que par un seul résultat) est appelé **événement élémentaire**.

Compte tenu de cette identification naturelle, on peut étendre aux événements les notations et opérations usuelles sur les ensembles, en notant ω le résultat de l'expérience :

Terminologue probabiliste	**Notation ensembliste**
Événement certain	Ω
Événement impossible	$\varnothing$
L'événement A est réalisé	$\omega \in A$
L'événement A n'est pas réalisé	$\omega \in \overline{A}$
L'un des événements A ou B est réalisé	$\omega \in A \cup B$
Les événements A et B sont réalisés	$\omega \in A \cap B$
A et B sont incompatibles (ou disjoints)	$A \cap B = \varnothing$
A est réalisé, mais pas B	$\omega \in A \setminus B$ ou $\omega \in A \cap \overline{B}$
Si A est réalisé, alors B est réalisé	$A \subset B$

De plus, on dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements (I étant une partie de $\mathbb{N}$) sont deux à deux incompatibles si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, on a : $A_i \cap A_j = \varnothing$.

A.3. Ensemble d'événements. Espace probabilisable

On a vu que tout événement peut être identifié à une partie de Ω. Il est maintenant légitime de se demander si la réciproque est également vraie.
Dans le cas où Ω est un ensemble fini, les parties de Ω sont toutes finies et toute partie $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ de Ω représente un événement, réalisé lorsque le résultat de l'expérience est l'une des issues $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Il est donc naturel, dans ce cas, de choisir $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements. On pourrait choisir $\{\Omega, \varnothing\}$ comme ensemble des événements, mais on n'aura aucun mal à se convaincre qu'un tel choix est en général peu intéressant.
De même, si Ω est dénombrable, on admettra qu'il est naturel de choisir $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements (même s'il est alors bien plus difficile de décrire cet ensemble).
En revanche, il existe des situations où cela n'est plus possible, notamment, et on l'admettra, dans les cas où Ω est infini et non dénombrable, comme par exemple si $\Omega = \mathbb{R}$ ou si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Dans ces cas, il est cependant nécessaire que l'ensemble des événements ait certaines propriétés compatibles avec les opérations que l'on effectuera sur les événements. C'est pourquoi on se donne la définition suivante :

Définition 31.1

Étant donné un ensemble Ω non vide, on se donne un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω, appelé **ensemble des événements**, et qui vérifie :

i. $\Omega \in \mathcal{A}$

ii. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ (A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A})$

iii. $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ / I est une partie dénombrable de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Remarque Un tel ensemble $\mathcal{A}$, inclus dans $\mathscr{P}(\Omega)$, contenant Ω (point *i*), stable par passage au complémentaire (point *ii*) et par union dénombrable (point *iii*), est appelé tribu de Ω (le terme n'est pas au programme).

Proposition 31.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$. Un espace probabilisable.

i. $\varnothing \in \mathcal{A}$,

ii. $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ / I est une partie finie de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

iii. $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ / I est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemples 31.1 **a.** Si l'expérience consiste à effectuer un lancer d'un dé cubique usuel et que l'on choisit pour univers des possibles $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et comme tribu $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, $E = \{1, 3, 5\}$ est un événement, réalisé si le résultat affiché par le dé est un nombre impair. Son complémentaire est l'événement $\overline{E} = \{2, 4, 6\}$, réalisé si le résultat est un nombre pair.

Si A est l'événement « obtenir un résultat pair » et B est l'événement « obtenir un résultat inférieur ou égal à 3 », alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et $A \cap B = \{2\}$.

b. Si l'expérience consiste à effectuer deux lancers de pièce et que l'on choisit pour univers des possibles $\Omega = \{P, F\}^2$ et comme tribu $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, l'événement E : « obtenir deux résultats différents » est : $E = \{(P, F), (F, P)\}$.

Preuve

i. Comme Ω appartient à $\mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire :

$$\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$$

ii. Soit n un entier naturel non nul et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$. On pose alors $A_i = \Omega$ si $i \geqslant n + 1$. La famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est alors une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable, on en déduit que :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{A}$$

iii. Soit I une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. On rappelle que les lois de Morgan assurent que :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}}$$

$\mathcal{A}$ étant stable par union finie ou dénombrable et par passage au complémentaire, on en déduit :

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

□

Définition 31.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

i. On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$ (autrement dit s'ils ne peuvent se réaliser en même temps),

ii. On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ sont **deux à deux incompatibles** si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, A_i et A_j sont incompatibles.

A.4. Système complet d'événements

Définition 31.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle **système complet d'événements** toute famille $(A_i)_{i \in I}$ (où I est une partie quelconque de $\mathbb{N}$) formée d'éléments de $\mathcal{A}$ et vérifiant :

i. $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

ii. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Exemple 31.2 On considère une expérience aléatoire consistant à effectuer trois lancers de pièces et on choisit pour univers des possibles $\Omega = \{P, F\}^3$ et comme tribu $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. On envisage les événements A_k : « on obtient exactement k fois pile », pour $0 \leqslant k \leqslant 3$. Alors (A_0, A_1, A_2, A_3) est un système complet d'événements.

B. Probabilité. Espace probabilisé

B.1. Définitions

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 31.5

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

i. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii. $\mathbb{P}$ est une application σ-additive, c'est-à-dire que, pour tout famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'**événements deux à deux disjoints**, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Une telle probabilité $\mathbb{P}$ étant fixée, le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque On peut donc affirmer que si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Il n'y aura donc pas de justification de convergence à apporter dans ce cas.

Attention cependant à éviter toute justification du type « la série converge car c'est une somme de probabilités » car il manque l'essentiel : les événements doivent être deux à deux incompatibles. Par exemple, si l'on considère une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement « obtenir face au $n^{ème}$ lancer », on aura beaucoup de mal à prouver que la série $\sum \mathbb{P}(F_n)$ converge : puisque son terme général ne converge pas vers 0, la série diverge grossièrement.

Proposition 31.6 ▶ Probabilité uniforme

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini non vide constitué de n éléments et si on note $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que : $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$.
Cette application $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}$$

Lorsque l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est muni de cette probabilité uniforme, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** (ou plus simplement qu'il y a **équiprobabilité**).

Exercice 31.1 On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul. On effectue dans cette urne deux tirages au hasard d'une boule avec remise. Calculer la probabilité de l'événement E : « on obtient deux fois le même numéro ».

B.2. Propriétés

Dans la suite de cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tous les événements considérés sont donc des éléments de $\mathcal{A}$.

Théorème 31.7

i. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

ii. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

iii. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

iv. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Exercice 31.2 On se propose de démontrer le théorème 31.7.

1. Démontrer le point *i.*
2. En remarquant que, pour tout couple (A,B) d'événements, $B = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$, démontrer le point *ii.*
3. Démontrer les points *iii* et *iv.*

Exercice 31.3 On effectue n lancers d'une pièce équilibrée, n étant un entier naturel non nul. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile ».

Théorème 31.8 ▶ Formule de Poincaré

Si A, B et C sont trois événements, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Preuve

◇ Soit A et B deux événements. On note : $A_1 = A \cap B$, $A_2 = A \cap \overline{C_1}$ et $A_3 = B \cap \overline{C_1}$. On a alors :

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = A_1 \cup A_3 \quad \text{et} \quad A \cup B = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

De plus, A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux disjoints par construction donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2), \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = [\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)] + [\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)] - \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

◇ Pour trois événements A, B et C, on pourrait procéder de façon analogue. Mais on peut aussi utiliser ce qui vient d'être démontrer, en remarquant que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

Théorème 31.9 ▶ Théorème de la limite monotone

Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements :

i. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante au sens de l'inclusion** (*i.e.* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

ii. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante au sens de l'inclusion** (*i.e.* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 31.4 On considère une expérience aléatoire consistant à effectuer une infinité de lancers d'une pièce équilibrée. Calculer la probabilité de l'événement E : « obtenir au moins une fois pile ».

Théorème 31.10

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Preuve

◇ On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$$

On a alors :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ B_n \subset B_n \cup A_{n+1} = B_{n+1}$$

On en déduit, d'après le théorème 31.9 :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

◇ Le second point se démontre de manière analogue.

□

Définition 31.11

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et si A est un événement, on dit que :

i. A est **négligeable** (ou **quasi-impossible**) si : $\mathbb{P}(A) = 0$,

ii. A est **quasi-certain** (ou est réalisé presque sûrement – en abrégé *p.s.*) si : $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarques

a. Retenir qu'un événement de probabilité 1 n'est pas toujours certain. Ainsi, dans l'exercice 25.4 l'événement « obtenir au moins un pile » a pour probabilité 1, même s'il est possible de n'obtenir aucun face.

b. De même, un événement de probabilité nulle n'est pas toujours impossible. Par exemple, dans une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, la probabilité de n'obtenir que des piles est nulle. Cependant, il est possible (quoiqu'improbable) de n'obtenir que des piles !

C. Probabilité conditionnelle

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tous les événements considérés sont donc des éléments de $\mathcal{A}$.

C.1. Définition

Définition 31.12

Soit A un événement de probabilité non nulle.
Si B est un événement, on appelle **probabilité de B conditionnée par A**, ou **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre $\mathbb{P}_A(B)$ défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarques

a. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a donc : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

b. Attention : avant d'envisager une probabilité conditionnelle à l'événement A, il est fondamental de s'assurer que A n'est pas un événement négligeable ; sinon le quotient n'a pas de sens.

Proposition 31.13

Si A est un événement de probabilité non nulle, l'application $B \mapsto \mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, appelée probabilité conditionnelle sachant A (ou aussi probabilité conditionnelle à l'événement A), et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est un espace probabilisé.

Remarques

a. On rencontre aussi parfois la notation $\mathbb{P}(B \mid A)$ au lieu de $\mathbb{P}_A(B)$ mais ce n'est pas la notation choisie par le programme.

b. Attention, la notion de conditionnement se rapporte à la probabilité, pas à l'événement : il est donc correct de parler de « la probabilité sachant A de l'événement B » mais pas de « l'événement B achant A ».

c. $\mathbb{P}_A$ étant une probabilité, toutes les méthodes usuelles de calcul des probabilités sont à disposition et il n'est donc pas toujours nécessaire d'utiliser la définition pour calculer une probabilité conditionnelle).

Proposition 31.14

Si A est un événement de probabilité non nulle, on a :

i. $\mathbb{P}_A(A) = 1$

ii. $\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$

iii. $\forall (B, C) \in \mathcal{A}^2,\ \mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate du fait que l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.

b. Attention, il n'y a pas de formule générale simple (à part la définition), permettant de calculer $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ ou $\mathbb{P}_{A \cup B}(C)$.

C.2. Formule des probabilités composées

Théorème 31.15 ▸ Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)$$

Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ est une famille d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarques

a. Retenir que, pour écrire ce résultat, il faut que chaque probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ne soit pas nulle. Mais comme $(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) \subset (A_1 \cap \ldots A_k)$ si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il suffit que la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ ne soit pas nulle pour que les autres ne le soient pas.

b. Le plus souvent, on ne sait pas à l'avance que la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ n'est pas nulle. Dans ce cas, il faudrait procéder par récurrence pour être parfaitement rigoureux.

Preuve

On procède par récurrence, en notant, pour $p \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{H}(p)$ la proposition :

$$« \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p) »$$

◇ Si $p = 2$. On sait que :

$$\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

et donc, en mutlipliant par $\mathbb{P}(A_1)$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)$$

Ainsi, $\mathscr{H}(2)$ est vraie.

◇ Soit $p \in [\![2, n]\!]$. Supposons que $\mathscr{H}(p)$ soit vraie. En appliquant $\mathscr{H}(2)$, on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right)\,\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_p}(A_{p+1})$$

et donc, d'après $\mathscr{H}(p)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p+1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{p-1}}(A_p)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_p}(A_{p+1})$$

Ainsi : $\mathscr{H}(p) \Rightarrow \mathscr{H}(p+1)$.

◇ Finalement, on a prouvé que, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

□

Exercice 31.5 On dispose d'une urne contenant initialement deux boules : une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant : à chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'une et on rajoute une boule de la même couleur avant de procéder au tirage suivant. On suppose qu'à chaque tirage, chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être obtenue et on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé permettant de modéliser cette expérience.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche à chacun des n premiers tirages, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

C.3. Formule des probabilités totales

Théorème 31.16 ▶ Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors, en notant $J = \{i \in I \ / \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0\}$:

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(A)$$

Remarques

a. Encore une fois, quand on écrit des probabilités conditionnelles, il ne faut pas oublier de s'assurer que les événements par lesquels on conditionne sont tous de probabilité non nulle, même quand ce sont des éléments d'un système complet d'événements. En effet, par définition, les événements d'un système complet d'événements ne sont pas impossibles, mais ils peuvent être négligeables (même si ce cas de figure est rare).

b. Cette formule est sans doute l'une des formules les plus utiles en probabilité : on l'utilisera dès qu'on recherche la probabilité d'un événement dont la réalisation dépend d'un résultat antérieur.

Preuve Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements et $J = \{i \in I \ / \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0\}$. Soit A un événement. On a donc :

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$$

De plus, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, on a :

$$(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) \subset A_i \cap A_j$$

et donc, les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ étant deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in I^2 \ / \ i \neq j,\ (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \varnothing$$

Ainsi, les événements de la famille $(A \cap A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et donc :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap A_i)$$

Par ailleurs, on a :

$$\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A \cap A_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin J \\ \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}(A) & \text{si } i \in J \end{cases}$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}(A)$$

□

Exercice 31.6 On dispose de deux urnes : l'urne U contient 10 boules, dont 4 rouges et 6 noires, l'urne V contient 10 boules, dont 8 rouges et 2 noires. On lance un dé cubique équilibré. Si le dé donne 1 ou 2, on tire une boule de l'urne U, sinon, on tire une boule de l'urne V. On suppose que chaque boule de l'urne choisie a la même probabilité d'être obtenue. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

C.4. Formule de Bayes

Théorème 31.17 ▶ Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarques

a. Cette formule sert le plus souvent lorsqu'on cherche à calculer la probabilité sachant A d'un événement « antérieur à A », c'est-à-dire, en quelque sorte, quand on peut voir en A une conséquence de B.

b. Il peut arriver que l'on ne connaisse pas la valeur de $\mathbb{P}(A)$. Dans ce cas, il arrivera souvent que l'on utilise la formule des probabilités totales pour calculer le dénominateur.

Preuve Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. On a alors, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

et donc, d'après la formule des probabilités composées 31.15 :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$$

□

Exercice 31.7 On reprend l'expérience étudiée dans l'exercice 25.6. Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule de l'urne U sachant que la boule tirée est rouge.

D. Événements indépendants

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tous les événements considérés sont donc des éléments de $\mathcal{A}$.

D.1. Indépendance de deux événements

Définition 31.18

Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Remarques

a. L'indépendance de deux événements est liée à la probabilité dont est muni l'espace probabilisé, et, rigoureusement, il serait préférable de dire que « A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ ». La justification de l'indépendance de deux événements devra donc se faire ou bien par le calcul (rare), ou bien à l'aide d'arguments tirés de l'énoncé (ce qui est le plus souvent le cas).

b. Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on n'a pas nécessairement $\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\,\mathbb{P}_C(B)$; autrement dit, A et B ne sont pas nécessairement indépendants pour $\mathbb{P}_C$.

c. En particulier, on peut remarquer que, si A est un événement négligeable, A est indépendant de tout événement, en particulier de lui-même. En effet, si A est un événement de probabilité nulle, alors, pour tout événement B, l'inclusion $A \cap B \subset A$ implique que la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$ est nulle, et donc que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Il existe donc des événements qui sont indépendants d'eux-mêmes en probabilité (par exemple l'événement impossible), ce qui, intuitivement, n'est pas forcément évident.

Proposition 31.19

Si A et B sont deux événements et si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Preuve Comme $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)$ et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) &\iff \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\\ &\iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

□

Proposition 31.20

Si A et B sont deux événements, les propositions suivantes sont équivalents :

i. A et B sont indépendants,

ii. A et $\overline{B}$ sont indépendants,

iii. $\overline{A}$ et B sont indépendants,

iv. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Preuve

◇ On suppose que A et B sont indépendants. En remarquant que B et $\overline{B}$ sont deux événements disjoints dont la réunion est égale à Ω, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et, comme A et B sont supposés indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(A)\,[1 - \mathbb{P}(B)]\\ &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B})\end{aligned}$$

Ainsi, si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

◇ On montre de même les implications $(ii \Rightarrow iii)$, $(iii \Rightarrow iv)$ et $(iv \Rightarrow i)$.

□

D.2. Famille d'événements indépendants

Définition 31.21

Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

i. On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux indépendants** si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$$

ii. On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants** (ou plus simplement indépendants) si, pour toute partie finie J de I, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

En particulier, si la famille est finie, les événements de la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \forall (i_j)_{1\leqslant j\leqslant k} \in [\![1,n]\!]^k \ \ /\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

Remarques

a. Si les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. En revanche, la réciproque est fausse en général. Il est important de noter que, dans la plupart des problèmes de probabilité, c'est la mutuelle indépendance qui est utile.

b. Comme c'est le plus souvent la mutuelle indépendance qui est utile, il est rare que l'on doive justifier qu'une famille est formée d'événements deux à deux indépendants. Pour cette raison, il arrive très fréquemment que l'on dise plus simplement que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont « indépendants »pour dire qu'ils sont « mutuellement indépendants ».

c. Attention au quantificateur « $\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \forall (i_j)_{1\leqslant j\leqslant k} \in [\![1,n]\!]^k \ /\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ » de la définition : on ne peut pas choisir uniquement $(i_1,\dots,i_k) = (1,\dots,k)$ mais il faut bien envisager tous les choix possibles de k indices distincts $i_1,\dots,i_k$ appartenant à $[\![1,n]\!]$.

Proposition 31.22

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants et si I_1 et I_2 sont deux parties disjointes de I telles que $I_1 = I_2 = I$, on définit une famille $(B_i)_{i\in I}$ d'événements mutuellement indépendants en posant :

$$\forall i \in I_1,\ B_i = A_i \quad \text{et} \quad \forall i \in I_2,\ B_i = \overline{A_i}$$

Remarque Cette proposition est une généralisation de 31.20 dans le cas de familles contenant plus de deux événements.

Exercice 31.8 On dispose de deux pièces donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Deux joueurs A et B lancent simultanément une de ces pièces, à deux reprises. On suppose que les résultats des différents jets (entre lancers et entre pièces) sont mutuellement indépendants. A est déclaré vainqueur s'il obtient pile avant que B n'obtienne face. B est déclaré vainqueur s'il obtient face avant que A n'obtienne pile. Les deux joueurs ne peuvent être déclarés vainqueurs en même temps. S'il n'y a pas de vainqueur, le jeu est déclaré nul. Calculer la probabilité que A gagne.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 31-1

Comme on effectue deux tirages avec remise dans une urne contenant n boules discernables, on peut choisir comme univers des possibles $\Omega = [\![1, n]\!]^2$. Ω est fini donc on choisit comme tribu $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
Enfin, comme les tirages sont effectués, toutes les boules ont la même probabilité d'être obtenues, donc la probabilité est uniforme et donc :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(E)}{n^2}$$

De plus, on a : $E = \{(k, k), k \in [\![1, n]\!]\}$ et donc : $\text{Card}(E) = n$, donc finalement :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Correction de l'exercice 31-2

1. En remarquant que $\varnothing = \overline{\Omega}$ et en utilisant la définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

2. Soit (A, B) un couple d'éléments de $\mathcal{A}$ tel que : $A \subset B$. On a alors : $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ et donc, comme A et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$$

et donc :

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

3. Pour tout événement A, on a : $\varnothing \subset A \subset \Omega$ donc, d'après les résultats précédents : $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

4. Pour tout événement A, A et $\overline{A}$ sont disjoints et vérifient : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et donc :

$$\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

d'où :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Correction de l'exercice 31-3

Comme on effectue n lancers, on choisit : $\Omega = \{P, F\}^n$ et, comme Ω est fini, on choisit : $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. De plus, la pièce est équilibrée, donc donne « pile » ou « face » avec la même probabilité, donc la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme. En notant E_n l'événement « on obtient au moins une fois pile », on remarque que l'événement $\overline{E_n}$ est plus simple à étudier, puisqu'il s'agit de l'événement « on n'obtient que des faces ». Or il y a 2^n suites de lancers possibles, parmi lesquelles une seule ne donne que des faces, donc :

$$\mathbb{P}(\overline{E_n}) = \frac{1}{2^n}$$

et alors :

$$\mathbb{P}(E_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Correction de l'exercice 31-4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on envisage l'événement E_n : « on obtient au moins une fois pile au cours des n premiers lancers ». On a alors :

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si E_n se réalise, alors on a obtenu au moins une fois pile au cours des n premiers lancers, donc des $n+1$ premiers et E_{n+1} se réalise, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \subset E_{n+1}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

Par ailleurs, on a déjà vu dans l'exercice 3 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

et donc, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$) :

$$\mathbb{P}(E) = 1$$

Correction de l'exercice 31-5

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ». On cherche la probabilité de l'événement

$$E = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

Comme on effectue un nombre fini de tirages et comme, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche n'est pas nulle (car il y a toujours au moins une boule blanche dans l'urne et que toutes les boules ont la même probabilité d'être obtenue), il est raisonnable d'admettre (pour faire l'économie d'une récurrence) que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \neq 0$$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ \ldots\ \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

De plus, l'urne contient initialement 2 boules, dont une blanche et, pour tout $k \geqslant 2$, sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$, l'urne contient $k+1$ boules, dont k blanches (la boule initiale, à laquelle se sont ajoutées $k-1$ boules, une par tirage ayant donné une boule blanche), au moment de procéder au $k^{\text{ème}}$ tirage et donc, chaque boule ayant la même probabilité d'être obtenue :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!]\,,\ \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{k}{k+1}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$$

et comme les termes se simplifient « en cascade » :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n+1}$$

Correction de l'exercice 31-6

On note U (respectivement V) l'événement « l'urne U est choisie »(resp. « l'urne V est choisie ») et R l'événement « on tire une boule rouge ». (U, V) est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(U)\ \mathbb{P}_U(R) + \mathbb{P}(V)\ \mathbb{P}_V(R)$$

De plus, par hypothèse et comme le dé est équilibré, on a :

$$\mathbb{P}(U) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(V) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Par ailleurs, et comme chaque boule de l'urne choisie a la même probabilité d'être obtenue, on a :

$$\mathbb{P}_U(R) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_V(R) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

Correction de l'exercice 31-7

On cherche la probabilité $\mathbb{P}_R(U)$. D'après la formule de Bayes, R et U étant tous deux de probabilité non nulle, on a :

$$\mathbb{P}_R(U) = \frac{\mathbb{P}(U)\ \mathbb{P}_U(R)}{\mathbb{P}(R)}$$

et donc, d'après les calculs précédents :

$$\mathbb{P}_R(U) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

Correction de l'exercice 31-8

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on note A_k l'événement « le joueur A obtient pile au $k^{ème}$ lancer » et B_k l'événement « le joueur B obtient pile au $k^{ème}$ lancer. On note A l'événement A gagne. On a donc :

$$E = (A_1 \cap \overline{B_1}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2 \cap \overline{B_2})$$

Or les événements $A_1 \cap \overline{B_1}$ et $\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2 \cap \overline{B_2}$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2 \cap \overline{B_2})$$

et alors, comme les résultats des différents lancers sont indépendants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\ \mathbb{P}(\overline{B_1})\ \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(\overline{B_2}) \\
&= p^2 + p(1-p)^3 \\
&= p\left[p + (1-p)^3\right]
\end{aligned}$$

Sommaire