28 Notions de dénombrement

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

La plupart des notions abordées dans ce chapitre ne sont pas explicitement au programme. Il est cependant grandement utile de les travailler, car cela facilitera les raisonnements en probabilités.

A. Ensembles finis, ensembles dénombrables

Définition 28.1

Soit E un ensemble. On dit que :

i. E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une application bijective de E sur $[\![1, n]\!]$. Un tel entier n, s'il existe, est unique et appelé **cardinal** de E, et noté $\text{Card}\,(E)$. Par convention, on pose : $\text{Card}\,(\varnothing) = 0$.

ii. E est dénombrable s'il existe une application bijective de E sur $\mathbb{N}^*$.

Remarques

a. Si E est fini, $\text{Card}\,(E)$ est donc égal au nombre d'éléments de E.

b. Pour faire simple, un ensemble est dit dénombrable si l'on peut numéroter ses éléments.

c. *Dénombrer un ensemble*, c'est déterminer son cardinal.

Exemple 28.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables. $\mathbb{R}$ et les intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point ne sont pas dénombrables.

Proposition 28.2

Soient E et F deux ensembles. Si E est fini et s'il existe une bijection de E sur F et si E est fini, alors F est fini et : $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(F)$.

Remarque Ce résultat est un résultat essentiel en dénombrement. Ainsi, pour dénombrer un ensemble F, on peut chercher un ensemble E dont le cardinal est simple à déterminer, en bijection avec F.

Théorème 28.3

Si E est un ensemble fini et si F est une partie de E, alors :

i. F est fini et : $\text{Card}\,(F) \leqslant \text{Card}\,(E)$

ii. si $\text{Card}\,(F) = \text{Card}\,(E)$, alors : $F = E$

Proposition 28.4

Si E et F sont deux ensembles finis et disjoints, alors $E \cup F$ est fini et :

$$\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\,(E) + \text{Card}\,(F)$$

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles deux à deux disjoints (n désignant un entier naturel non nul), alors $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ est fini et :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\,(E_i)$$

Proposition 28.5

Si E est un ensemble fini et si F est une partie de E, alors : $\text{Card}\,(\overline{F}) = \text{Card}\,(E) - \text{Card}\,(F)$.

Preuve Comme F et $\overline{F}$ sont disjoints et comme $F \cup \overline{F} = E$, on a, d'après la proposition 28.4 :

$$\text{Card}(F) + \text{Card}(\overline{F}) = \text{Card}(E)$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Proposition 28.6

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont des ensembles finis et :

$$\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\,(E) + \text{Card}\,(F) - \text{Card}\,(E \cap F)$$

Exercice 28.1 Démontrer la proposition 28.6. On pourra commencer par écrire $E \cup F$ comme la réunion de trois ensembles deux à deux disjoints.

Proposition 28.7 ► Lemme des bergers

Soient E et F deux ensembles finis f une application surjective de E sur F. Si, pour tout élément y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est de cardinal p (p étant un entier naturel), alors : $\text{Card}\,(E) = p \times \text{Card}\,(F)$.

Remarque Cette proposition est intuitivement simple, surtout si l'on se souvient de sa traduction pastorale : « si l'on admet que tous les moutons d'un troupeau ont quatre pattes, alors pour compter le nombre de pattes dans le troupeau, il suffit de compter le nombre de mouton puis de multiplier par 4 ».

Exemple 28.2 Une jeu de carte usuel est composé de 4 couleurs (carreau, cœur, pique et trèfle) et chaque couleur comporte 13 cartes : $As, 2, 3, \dots, 10$, valet, dame et roi. Un jeu complet comporte donc $4 \times 13 = 52$ cartes.

Proposition 28.8

Si E et F sont deux ensembles finis, alors : $\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\,(E) \times \text{Card}\,(F)$.

Preuve On note $n = \text{Card}(E)$, $p = \text{Card}(F)$ et :

$$E = \{e_i, i \in [\![1, n]\!]\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!]\; F_i = \{e_i\} \times F$$

On a alors :

$$E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

et alors, les ensembles $F_1, \dots, F_n$ étant deux à deux disjoints :

$$\text{Card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(F_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(F) = np$$

□

B. Cardinaux des ensembles de référence

Dans cette partie, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

B.1. Listes

Définition 28.9

Étant donné un ensemble E, une p-**liste** (ou p-**uplet**) d'éléments de E est une application de $[\![1,p]\!]$ dans E ; autrement dit une suite $(x_1,\ldots,x_p)$ formée d'éléments (non forcément distincts) de E.

Proposition 28.10

Si E est un ensemble de cardinal n, il y a n^p p-listes d'éléments de E.

Preuve Par définition, l'ensemble des p-listes d'éléments de E est de même cardinal que l'ensemble E^p des suites de p éléments de E. Le résultat est donc obtenu par récurrence à partir de 28.8. □

Remarque On remarquera que le résultat suivant est équivalent au précédent :

Proposition 28.11

Si E est un ensemble de cardinal p et F est un ensemble de cardinal n, le nombre d'applications de E dans F est égal à n^p.

Exercice 28.2 On dispose de 6 boules, numérotées de 1 à 6, que l'on doit disposer dans 10 urnes, numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que chaque urne a une contenance illimitée ?

B.2. Listes d'éléments distincts

Définition 28.12

Étant donné un ensemble E, un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments distincts de E ; autrement dit une suite $(x_1,\ldots,x_p)$ formée d'éléments distincts de E, ou encore une application injective de $[\![1,p]\!]$ dans E.

Proposition 28.13

Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque Ce nombre est parfois noté A_n^p (notation hors programme).

Exercice 28.3 Démontrer la proposition 28.13. On pourra procéder par récurrence sur p.

Remarque On remarquera que le résultat suivant est équivalent au précédent :

Proposition 28.14

Si E est un ensemble de cardinal p et F est un ensemble de cardinal n, le nombre d'applications injectives de E dans F est :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 28.4 On dispose de 6 boules, numérotées de 1 à 6, que l'on doit disposer dans 10 urnes, numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que chaque urne ne peut contenir qu'une seule boule ?

B.3. Permutations

Définition 28.15

Étant donné un ensemble E de cardinal n, une **permutation** de E est une n-listes d'éléments distincts de E ; autrement dit un arrangement de n éléments de E, ou encore une application bijective de E sur E.

Proposition 28.16

Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre de permutations de E est $n!$

Preuve Ce résultat est un cas particulier de 28.13. □

Exercice 28.5 On dispose de 6 boules, numérotées de 1 à 6, que l'on doit disposer dans 6 urnes, numérotées de 1 à 6, de telle sorte qu'aucune urne ne soit vide. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

B.4. Combinaisons

Définition 28.17

Étant donné un ensemble E de cardinal n, une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E, de cardinal p ; autrement dit un sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ formé de p éléments distincts de E.

Proposition 28.18

Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce résultat est encore vrai si $p = 0$.

Remarque Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés **coefficients binomiaux**, car ils interviennent en particulier dans la formule du binôme de Newton.

Preuve On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E. Le résultat est immédiat si $p > n$ d'après 28.3. On suppose maintenant que $1 \leqslant p \leqslant n$. On remarque alors que construire un arrangement de p éléments de E équivaut à choisir une combinaison $\{a_1, \dots, x_p\}$ de p éléments de E puis à construire une permutation de $\{x_1, \dots, x_p\}$; comme il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de p éléments de E et, pour chacune de ces combinaisons, il y a $p!$ permutations possibles, on a donc :

$$A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$$

ce qui prouve le résultat si $1 \leqslant p \leqslant n$. Le cas $p = 0$ est immédiat car $\varnothing$ est l'unique combinaison de 0 éléments de E. □

Exercice 28.6 Si n et p sont deux entiers naturels tels que : $1 \leqslant p \leqslant n$, déterminer le nombre de suites $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$, strictement croissantes.

Proposition 28.19

Si n et p sont deux entiers naturels quelconques, alors :

i. Si $0 \leqslant p \leqslant n$: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

ii. Si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, alors : $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

iii. $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Remarque Comme il y a souvent des doutes sur la deuxième formule, il est important de savoir la retrouver rapidement.

Exercice 28.7 Démontrer la proposition 28.19.

Proposition 28.20 ► Formule du triangle de Pascal

Si n et p sont deux entiers naturels quelconques, alors :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Exercice 28.8 Démontrer la formule du triangle de Pascal.

Remarque Intuitivement, on peut aussi se souvenir que construire une partie de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$, deux cas disjoints sont possibles :

- soit on ne prend pas l'élément $n+1$, et il reste alors à choisir une partie de $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$: $\binom{n}{p+1}$ choix,
- soit on prend l'élément $n+1$, et il reste alors à choisir une partie de p éléments de $[\![1, n]\!]$: $\binom{n}{p}$ choix.

Proposition 28.21

Si E est un ensemble de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}\,(E)} = 2^n$$

Preuve Si on note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k l'ensemble des parties de E qui sont de cardinal k, on remarque que $\{P_k, k \in [\![0, n]\!]\}$ est une partition de $\mathscr{P}(E)$ et donc, d'après 28.4 :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(P_k)$$

et donc, d'après 28.18 et 28.19 :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

□

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 28-1

$E \cap F$ est un sous-ensemble de E, donc il est fini d'après 28.3. De plus, on remarque que :

$$E \cup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (E \cap F)$$

Or les ensembles $E \setminus F$, $F \setminus E$ et $E \cap F$ sont deux à deux disjoints donc, d'après 28.4, $E \cup F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E \setminus F) + \mathrm{Card}(F \setminus E) + \mathrm{Card}(E \cap F)$$

De plus, d'après 28.5, on a :

$$\mathrm{Card}(E \setminus F) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(E \cap F) \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(F \setminus E) = \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$$

et donc :

$$\mathrm{Card}\,(E \cup F) = \mathrm{Card}\,(E) + \mathrm{Card}\,(F) - \mathrm{Card}\,(E \cap F)$$

Correction de l'exercice 28-2

Disposer les 6 boules discernables dans les 10 urnes discernables revient à construire une 6-liste d'éléments de $[\![1, 10]\!]$ (le $k^{ème}$ élément de la liste indiquant dans quelle urne sera placée la boule numéro k), donc il y a 10^6 dispositions possibles.

Correction de l'exercice 28-3

On note $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Le cas $p > n$ est immédiat car il n'est alors pas possible de choisir p éléments distincts de E. Montrons alors par récurrence que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, la proposition $\mathscr{H}(p)$: « le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ » est vraie.

- ◇ Pour $p = 1$, il y a n 1-listes d'éléments distincts de E (on choisit un unique élément de E) et on remarque que :

$$n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

  donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie.
- ◇ Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\mathscr{H}(p)$ est vraie. Construire une $(p+1)$-liste $(a_1, \ldots, a_{p+1})$ d'éléments distincts de E équivaut alors à :
  - — construire la p-liste des p premiers éléments $(a_1, \ldots, a_p)$ distincts de E : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ façons d'après $\mathscr{H}(p)$, puis :
  - — choisir l'élément a_{p+1}, distinct de $a_1, \ldots, a_p$: $n - p$ façons.

  Ainsi, le nombre de $(p+1)$-listes d'éléments distincts de E est égal à :

$$\frac{n!}{(n-p)!} \times (n-p) = \frac{n!}{(n-p-1)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}$$

  donc : $\mathscr{H}(p) \Rightarrow \mathscr{H}(p+1)$.
- ◇ Finalement, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

Correction de l'exercice 28-4

Si chaque urne ne peut contenir plus d'une boule, disposer les 6 boules discernables dans les 10 urnes discernables revient à construire une 6-liste d'éléments distincts de $[\![1,10]\!]$ (le $k^{\text{ème}}$ élément de la liste indiquant dans quelle urne sera placée la boule numéro k), donc il y a

$$\frac{10!}{(10-6)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

dispositions possibles.

Correction de l'exercice 28-5

Comme aucune urne ne doit être vide et comme il y a autant d'urnes que de boules, disposer les boules revient à construire une permutation de l'ensemble des 6 boules, donc il y a 6! dispositions possibles.

Correction de l'exercice 28-6

Comme on cherche des suites strictement croissantes d'entiers, on peut remarquer qu'il est équivalent de construire une suite de p éléments de $[\![1,n]\!]$, strictement croissante, et de choisir une partie de p éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ puis de ranger ces éléments dans l'ordre croissant. Il y a donc $\binom{n}{p}$ suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,n]\!]$.

Correction de l'exercice 28-7

i. Par définition, si $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!\,(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$

ii. Par définition, on a, si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

iii. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Correction de l'exercice 28-8

Par définition, on a, si $0 \leqslant p \leqslant p+1 \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\
&= \frac{n!\,[(n-p)+(p+1)]}{(p+1)!\,(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,((n+1)-(p+1))!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

De plus, si $p > n$, on a :

$$\binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} = 0$$

donc on a encore :

$$\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Enfin, si $n = p$, on a :

$$\binom{n}{p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} = 1$$

donc on a encore une fois :

$$\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Sommaire