26 Fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

« L'objectif [de ce chapitre] est de confronter les étudiants à la notion de fonction réelle de n variables, aux principales définitions, tout en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité en un point pathologique est hors programme, ainsi que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par plusieurs formules » (extrait du programme officiel).
Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul et on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique usuelle.

A. Généralités

Définition 26.1

On appelle **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + c$$

où $a_1, \dots, a_n$ et c sont des constantes réelles.

Exemples 26.1

a. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto x + 2y - 1$ sont des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^2$.

b. Les fonctions $(x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto y$, $(x, y, z) \mapsto z$, $(x, y, z) \mapsto 3x - 2y + z - 2$ et $(x, y, z) \mapsto -y - z$ sont des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^3$.

c. Si $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors, en notant $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la colonne des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application $f : x \mapsto AX$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}^n$ puisque :

$$\forall x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

Définition 26.2

On appelle **fonction polynôme** définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ combinaison linéaire finie de fonctions de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

où $k_1, \dots, k_n$ sont des entiers naturels quelconques.

Exemples 26.2

a. Les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions polynômes.

b. Les fonctions $(x, y) \mapsto x^3y + 2xy + y^4$ et $(x, y) \mapsto -x^2 + 2x + y$ sont des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$.

c. Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors, en notant $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la colonne des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto {}^tXAX$ est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}^n$ puisque :

$$\forall x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$$

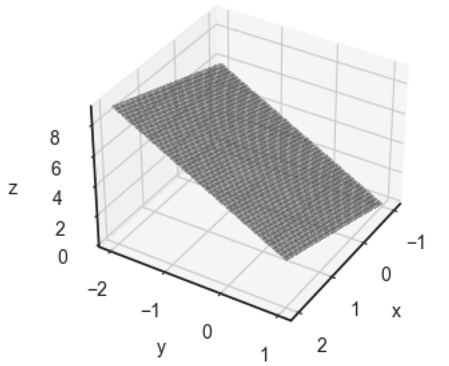


FIGURE 26.1 – Représentation graphique de la fonction affine $(x, y) \mapsto x - 2y + 3$

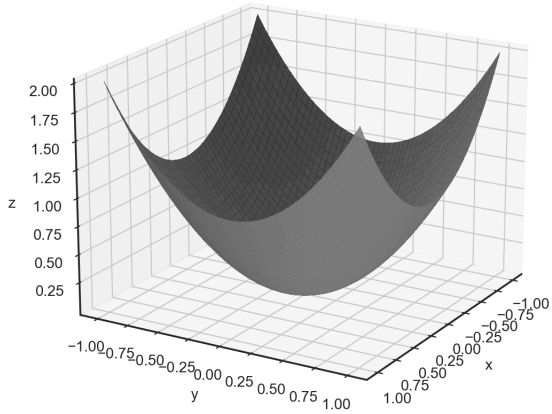


FIGURE 26.2 – Représentation graphique de la fonction polynôme $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

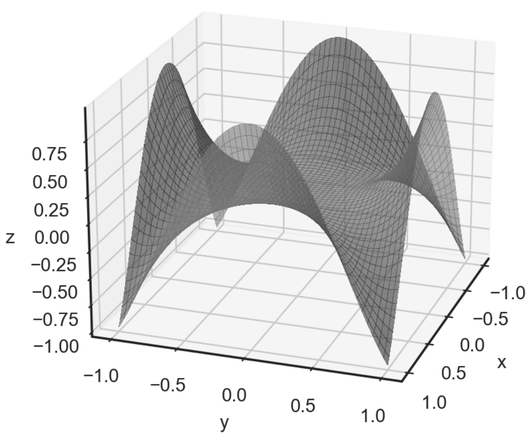


FIGURE 26.3 – Représentation graphique de la fonction polynôme $(x, y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

Définition 26.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. On appelle **graphe** de f l'ensemble

$$G(f) = \left\{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\right\}$$

Proposition 26.4

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$, alors son graphe est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Preuve Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction affine telle que $f(0) = 0$, il existe des constantes réelles $a_1, \dots, a_n$ telles que :

$$\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

et alors le graphe de f est :

$$\begin{aligned} G(f) &= \left\{ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \ / \ x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\} \\ &= \left\{ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x_{n+1} = 0 \right\} \\ &= \operatorname{Ker}(g) \end{aligned}$$

où g désigne la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{R}^{n+1},\ g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x_{n+1}$$

g étant une forme linéaire non nulle, $G(f)$ est donc un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Définition 26.5

On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^{n+1}$ est un **hyperplan affine** de $\mathbb{R}^{n+1}$ si A est le graphe d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 26.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel k, l'ensemble

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x, y) = k \right\}$$

est appelé **ligne de niveau** k de f.

Remarque Pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est l'intersection du graphe de f et de l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = k$.

Exemple 26.3 Par exemple, si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, alors :

- si $k < 0$, la ligne de niveau k de f est vide,
- si $k = 0$, la ligne de niveau 0 de f est le singleton $\{(0, 0)\}$,
- si $k > 0$, la ligne de niveau k de f est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = k$, c'est-à-dire le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

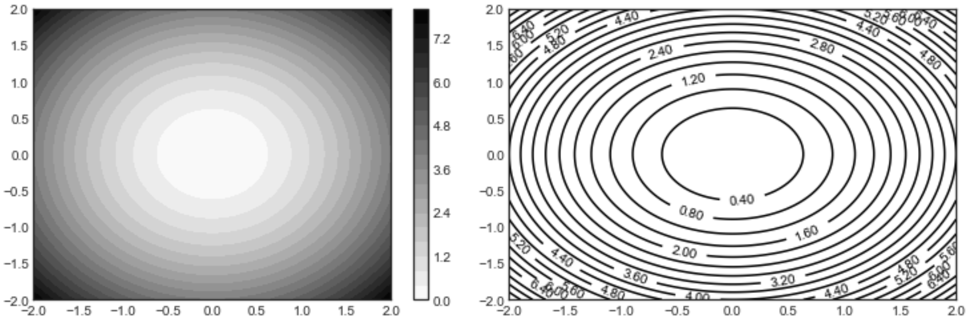


FIGURE 26.4 – Deux représentations graphiques de lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

B. Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 26.7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

i. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est **continue** en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x - a|| < \alpha \Longleftrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ii. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Remarque On peut remarquer que, dans le cas $n = 1$, on a :

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R}^2,\ ||x - a|| = |x - a|$$

et la définition de la continuité en a correspond bien à la définition vue pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 26.8

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 26.9

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.

i. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)\, g(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 26.10

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 26.4 La fonction $f : (x, y) \mapsto \left(x^2 + y\right) \ln(x^2 + 1) + x^2 y^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et somme de fonctions qui le sont.
En effet, les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y$ et $(x, y) \mapsto x^2 y^3$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynômes et la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + 1$, continue sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que fonction polynôme) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par la fonction ln, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque Attention à la précision dans les justifications, notamment lorsqu'il y a une composition, car les fonctions ne sont pas toutes définies sur le même ensemble (et n'ont d'ailleurs pas toutes le même nombre de variables).

Exercice 26.1

1. Justifier que la fonction $||\cdot|| : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que la fonction $f : (x,y,z) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + y + xyz}{x^2+y^2+z^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

C. Calcul différentiel : ordre 1

C.1. Dérivées partielles, gradient

Définition 26.11

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction

$$f_{x,i} : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}\right.$$

est appelée $\boldsymbol{i^{\text{ème}}}$ **fonction partielle** de f en x.

Exemples 26.5

a. Si $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^3$, les fonctions partielles de f en $(1,2)$ sont les fonctions

$$f_{(1,2),1} : x \mapsto f(x,2) = x^2 + 2x + 8 \quad \text{et} \quad f_{(1,2),2} : y \mapsto f(1,y) = 1 + y + y^3$$

b. Si $g : (x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + xy$, les fonctions partielles de f en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions

$$g_{(a,b),1} : x \mapsto g(x,b) = x\mathrm{e}^b + bx \quad \text{et} \quad g_{(a,b),2} : y \mapsto g(a,y) = a\mathrm{e}^y + ay$$

Remarque Le graphe de la première (respectivement de la deuxième) fonction partielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $y = b$ (respectivement $x = a$).

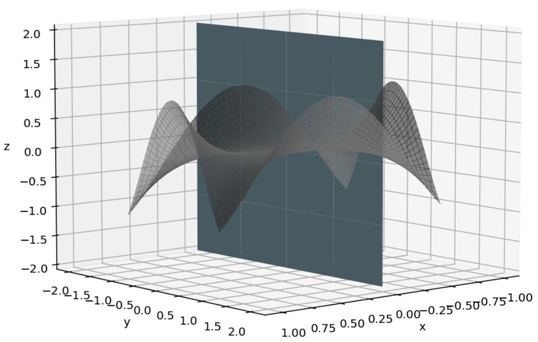


FIGURE 26.5 – Représentation graphique de $(x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$ et du plan d'équation $y = 0$

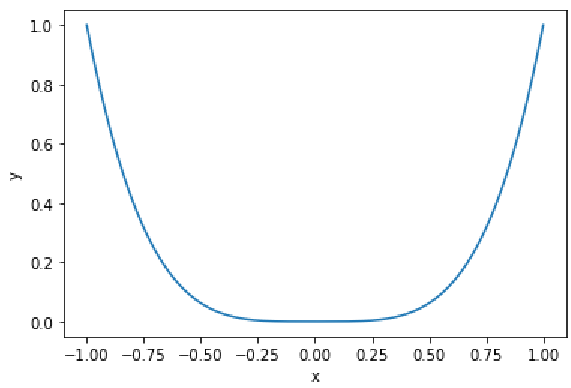


FIGURE 26.6 – Représentation graphique de $x \mapsto f(x,0)$

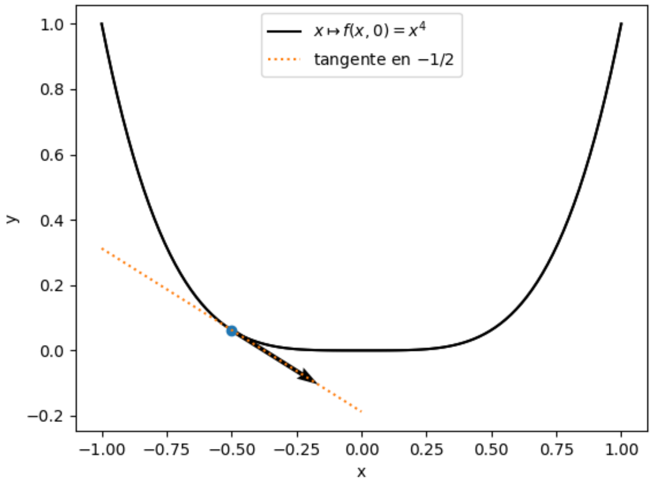
Définition 26.12

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on dit que f admet une $i^{\text{ème}}$ **dérivée partielle d'ordre 1** en x si la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle $f_{a,i}$ est dérivable en x_i et, dans ce cas, on note :

$$\partial_i f(x) = f'_{x,i}(x_i)$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on dit que f admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^n$ si f admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Remarque On peut par exemple remarquer que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et si $\partial_1 f(a,b)$ existe, alors $\partial_1 f(a,b)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de la première fonction partielle $x \mapsto f(x,b)$.



La première dérivée partielle de

$$f : (x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $x \mapsto f(x,0)$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$

Exemple 26.6 On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$, définie sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = g'(x) = 6x + 2y + 2xy^3$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h : y \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y) = h'(x) = 2x + 3x^2y^2$$

Exercice 26.2
1. Étudier l'existence des dérivées partielles de $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^3$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de $g : (x,y,z) \mapsto \cos(x) + 2yz + \mathrm{e}^z$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.

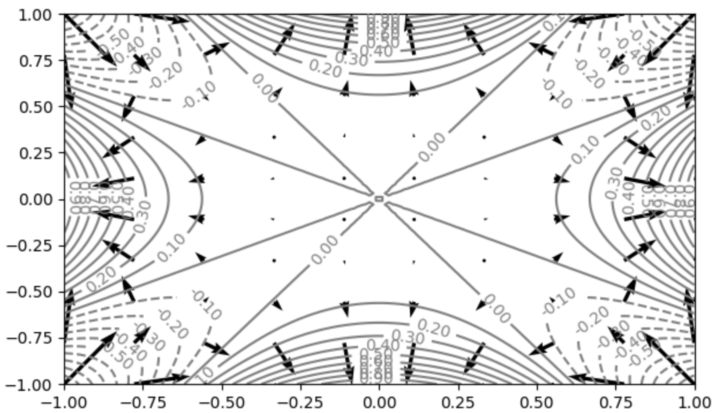
Définition 26.13

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et x un élément de $\mathbb{R}^n$. Si $\partial_i(f)(x)$ existe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n(f)(x))$$

est appelé **gradient** de f en x.

Remarque Si $\nabla f(a)$ existe, il est orthogonal à la ligne de niveau $f(a)$.



Une représentation d'un champ de gradients et de lignes de niveau pour la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

Exercice 26.3
1. Déterminer le gradient de $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^3$ en $(0, 0)$ et en $(1, 2)$.
2. Déterminer le gradient de $g : (x, y, z) \mapsto \cos(x) + 2yz + e^z$ en $(\pi, 1, 1)$.

Définition 26.14

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ si les fonctions $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 26.15

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 26.16

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

i. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 26.17

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 26.7 La fonction $f : (x, y) \mapsto \left(x^2 + y\right) \ln(x^2 + 1) + x^2 y^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions qui le sont.
En effet, les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y$ et $(x, y) \mapsto +x^2 y^3$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynômes et la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que fonction polynôme) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par la fonction ln, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x, y) = 2x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x\left(x^2 + y\right)}{x^2 + 1} + 2xy^3$$

et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + 2x^2 y^2$$

Exercice 26.4 Justifier que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^4 + y^2 + 1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

C.2. Développement limité à l'ordre 1

Théorème 26.18

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}^n$, continue et nulle en 0 telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + ||h||\, \varepsilon(h)$$

Cette égalité est appelée **développement limité** de f à l'ordre 1 en x.

Exercice 26.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en $(-1, 1)$ de la fonction $(x, y) \mapsto e^{x+y} - x^2 + 2xy^2$.

C.3. Dérivée directionnelle

Définition 26.19

Soit (x,u) un couple d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tel que $u \neq 0$. On appelle **droite** $\mathscr{D}_{x,u}$ passant par x et de vecteur directeur u l'ensemble des éléments y de $\mathbb{R}^n$ tels que $y - x$ et u soient colinéaires, autrement dit :

$$\mathscr{D}_{x,u} = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } y - x = tu\}$$

Remarques

a. Si $x = 0$, une droite passant par 0 est une droite vectorielle.

b. Comme $u \neq 0$, si y appartient à $\mathscr{D}_{x,u}$, il existe un unique réel t tel que $y - x = tu$ et on en déduit la proposition suivante :

Proposition 26.20

Soit (x,u) un couple d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tel que $u \neq 0$. On a :

$$\mathscr{D}_{x,u} = \{x + tu, \ t \in \mathbb{R}\}$$

L'application $t \mapsto x + tu$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{D}_{x,u}$, appelée **paramétrisation** de $\mathscr{D}_{x,u}$.

Proposition 26.21

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout couple (x,h) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, la fonction $g : t \mapsto f(x+th)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \ g'(t) = \langle \nabla f(x+th), h\rangle$$

Définition 26.22

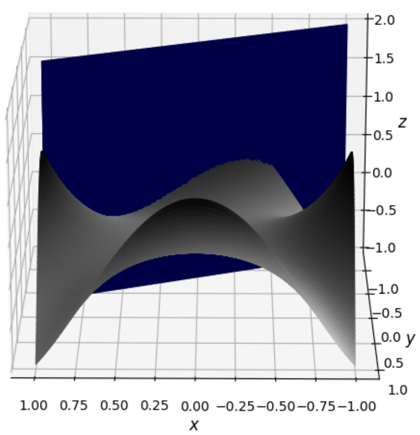
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, le nombre dérivé en 0 de la fonction $g : t \mapsto f(x+th)$ est appelé **dérivée directionnelle** de f en x dans la direction h et noté $\partial_h(f)(x)$:

$$\partial_h(f)(x) = \langle \nabla f(x), h\rangle$$

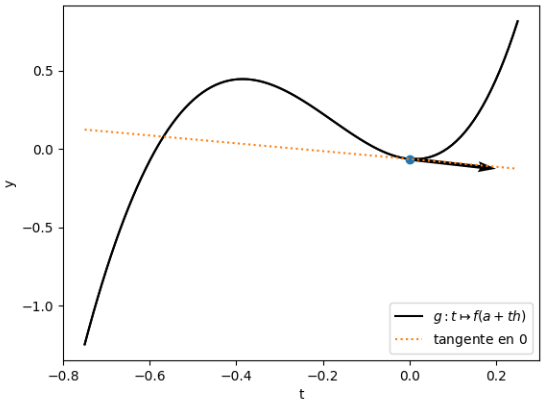
Remarque Le graphe de la fonction $t \mapsto f(a+th)$ est peut être vu comme l'intersection du graphe de f et de l'hyperplan affine

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{D}_{a,h}\}$$

Par exemple, si $f : (x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$, $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $h = (2,1)$, le graphe de $t \mapsto f(a+th)$ est l'intersection du graphe de f et du plan de $\mathbb{R}^3$ $\left\{\left(\frac{1}{2} + 2t, -\frac{1}{2} + t, z\right), \ (t,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$.



Par exemple, si $f : (x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$, $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $h = (2,1)$, le graphe de $t \mapsto f(a+th)$ est l'intersection du graphe de f et du plan de $\mathbb{R}^3$ $\left\{\left(\frac{1}{2}+2t, -\frac{1}{2}+t, z\right),\ (t,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$.



La dérivée directionnelle en $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ dans la direction $h = (2,1)$ de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $t \mapsto f(a+th)$ au point d'abscisse 0 : il est égal à $-\frac{5}{16}$.

Remarques

a. Si l'on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut remarquer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et si $x \in \mathbb{R}^n$, alors la dérivée directionnelle de f dans la direction e_i est :

$$\partial_{e_i} f(x) = \partial_i f(x)$$

b. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et si h est un vecteur de norme 1, le nombre $\partial_h f(x)$ est la pente en x de la tangente au graphe de la restriction de f à $\{x+th,\ t \in \mathbb{R}\}$. Or, d'après le résultat précédent et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, comme h est normé :

$$\begin{aligned} |\partial_h(x)| &\leqslant ||\nabla f(x)|| \cdot ||h|| \\ &\leqslant ||\nabla f(x)|| \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si la famille $(h, \nabla f(x))$ est liée donc, dans le cas où $\nabla f(x) \neq 0$, si et seulement si $h = \pm \frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$. Par conséquent, la direction de « la plus forte pente » de f en x est la direction $\nabla f(x)$.

D. Recherche d'extremum : condition d'ordre 1

Définition 26.23

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et x_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

i. On dit que $f(x_0)$ est un **minimum global** de f si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

ii. On dit que $f(x_0)$ est un **maximum global** de f si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

iii. On dit que $f(x_0)$ est un **extremum global** de f si c'est un minimum global ou un maximum global.

Définition 26.24

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ et x_0 un élément de $\mathbb{R}^n$.

i. On dit que $f(x_0)$ est un **minimum local** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ /\ ||x - x_0|| < \alpha,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

ii. On dit que $f(x_0)$ est un **maximum local** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ /\ ||x - x_0|| < \alpha,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

iii. On dit que $f(x_0)$ est un **extremum local** de f si c'est un minimum local ou un maximum local.

Théorème 26.25

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et si f admet un extremum local en x, alors : $\nabla f(x) = 0$.

Définition 26.26

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, on appelle **point critique** de f tout élément x de $\mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) = 0$.

Remarque En pratique, pour déterminer les extrema (ou extremums) d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, on commencera donc par déterminer les points critiques de f puis, pour chaque point critique (x_0, y_0), on étudiera le signe de la différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ou, de manière équivalente, de la différence $f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0)$ (cette seconde option étant souvent plus intéressante).

Remarque On peut remarquer que, si x est un point critique de f, toutes les dérivées directionnelles en x sont nulles.

Exercice 26.6 Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto 3 - 2x^2 - 4y^2 + 4xy + 2x$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque Il est possible d'utiliser Python pour conjecturer l'existence d'un extremum d'une fonction de deux variables, ou visualiser les extremums trouvés. Plusieurs options sont possibles pour cela :

- représenter des lignes de niveau à l'aide de la commande `contour` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`, ce qui peut se faire en dégradé de couleurs avec légende (figure 1) ou en représentant les lignes de niveau avec label (figure 2),
- représenter graphiquement la nappe (figures 3 et 4).

Exemple 26.8 Pour visualiser le résultat de l'exercie 22.6, on peut représenter certaines lignes de niveau de f à l'aide du programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('seaborn-white')
import numpy as np
def f(x,y):
    return(3-2*x**2-4*y**2+4*x*y+2*x)
x=np.linspace(0,2,200)
y=np.linspace(0,1,100)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
Z=f(X,Y)
plt.contourf(X,Y,Z,10,cmap='Greys')
plt.colorbar()
```

Dans ce programme :

- `x=linspace(0,2,200)` crée une matrice ligne `x` dont les coefficients sont les 200 premiers coefficients de la suite arithmétique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et $x_{199} = 2$,
- `y=linspace(0,1,100)` crée une matrice ligne `y` dont les coefficients sont les 100 premiers coefficients de la suite arithmétique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_0 = 0$ et $y_{99} = 1$,
- la commande `X,Y=np.meshgrid(x,y)` permet de générer les abscisses et ordonnées de l'ensemble des points (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tels que a et b soient des coefficients de `x` et `y` (permettant ainsi d'avoir tous les points de coordonnées (x_i, y_j) où $0 \leqslant i \leqslant 199$ et $0 \leqslant j \leqslant 99$: le vecteur `X` (respectivement le vecteur `Y`) ainsi construit est une matrice possédant 200 colonnes et 100 lignes, le coefficient `X[i,j]` (respectivement le coefficient `Y[i,j]`) étant égal à `x[j]` (respectivement `y[i]`),
- la commande `Z=f(X,Y)` crée un vecteur `Z` contenant les images de tous les points de coordonnées (x_i, y_j),
- la commande `plt.contourf(X,Y,Z,10,cmap='Greys')` permet de représenter graphiquement 10 lignes de niveau en dégradé de gris,

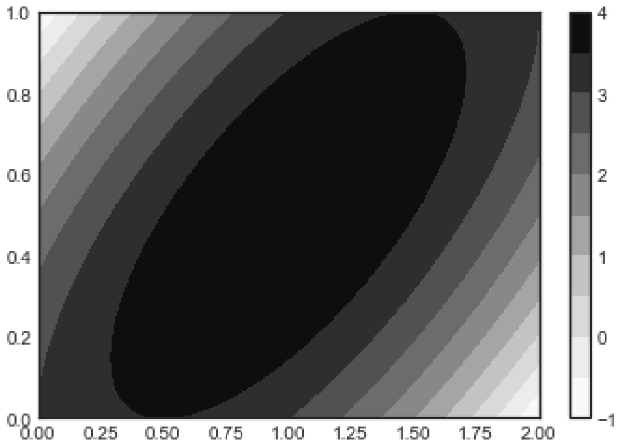


FIGURE 26.7 – Lignes de niveau en dégradé de gris

- la commande `plt.colorbar()` renvoie à droite du graphique la légende des couleurs différenciant les lignes de niveau.

On obtient le graphique suivant :

On constate ici que plus on se rapproche du point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, plus la valeur de f augmente en se rapprochant de 4 (qui est le maximum de f).

Exemple 26.9 Pour visualiser le résultat de l'exercie 22.6, on peut également représenter certaines lignes de niveau de f à l'aide du programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(x, y):
    return(3-2*x**2-4*y**2+4*x*y+2*x)
x=np.linspace(0,2,200)
y=np.linspace(0,1,200)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
Z=f(X,Y)
graphe=plt.contour(X,Y,Z,20,colors='grey')
plt.clabel(graphe,inline=1,fontsize=10,fmt='%3.2f')
```

Les premières instructions de ce programme sont identiques à celles du programme précédent ; de plus :

- la commande `plt.contour(X,Y,Z,10,colors='grey')` permet de représenter graphiquement 10 lignes de niveau en gris,
- la commande `plt.clabel` permet quant à elle d'indiquer, pour chaque ligne de niveau, de quelle ligne il s'agit (les options permettant de choisir le format d'affichage).

On obtient le graphique suivant :

On constate encore ici que plus on se rapproche du point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, plus la valeur de f augmente, semblant indiquer la présence d'un maximum, qu'il est cependant plus difficile d'identifier.

Exemple 26.10 Une dernière option est de représenter le graphe de f, par exemple à l'aide du programme Python suivant :

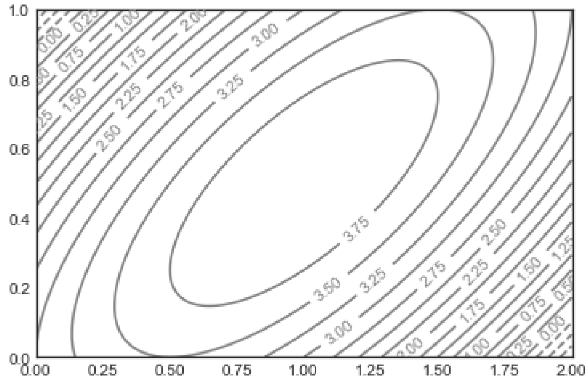


Figure 26.8 – Lignes de niveau avec label

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
def f(x, y):
    return(3-2*x**2 - 4*y**2+4*x*y+2*x)
x=np.linspace(0, 2, 200)
y=np.linspace(0, 1, 200)
X,Y=np.meshgrid(x, y)
Z=f(X,Y)
ax.plot_surface(X,Y,Z,linewidth=0, antialiased=
   False, shade = True, alpha = 0.4,color='gray')
ax.view_init(10,30)
plt.show()
```

- les commandes `ax.set_xlabel`, `ax.set_ylabel` et `a.set_zlabel` permettent de nommer les axes,
- la commande `ax.plot_surface(X,Y,Z)` permet de renvoyer la nappe représentant f,
- la commande `ax.view_init(10,30)` permet de choisir l'angle de visualisation (rotation des axes `x` et `y`).

On constate encore une fois la présence d'un maximum proche de 4.

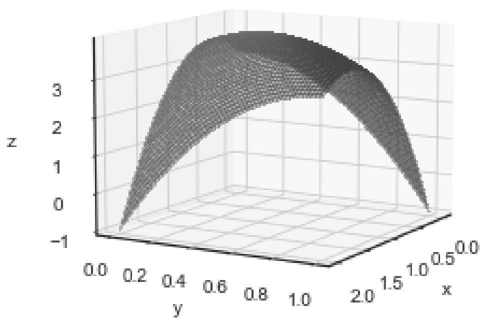


Figure 26.9 – Représentation 3D du graphe de f

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 26-1

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui prouve que la fonction $||\cdot||$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les fonctions $(x,y,z) \mapsto y+xyz$ et $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+1$ sont des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^3$ donc elles sont continues sur $\mathbb{R}^3$. La fonction $(x,y,z) \mapsto x$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}^3$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^3$. De plus, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}^3$. On en déduit que la fonction $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x+y+xyz$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme somme de fonctions qui le sont, puis que f est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 26-2

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = 2x+y$$
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y) = x+3y^2$$

2. Pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $x \mapsto g(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, donc g admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \partial_1(g)(x,y,z) = -\sin(x)$$
De même, pour tout $(x,z) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $y \mapsto g(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, donc g admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \partial_2(g)(x,y,z) = 2z$$
Enfin, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $z \mapsto g(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, donc g admet une troisième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \partial_3(g)(x,y,z) = 2y+\mathrm{e}^z$$

Correction de l'exercice 26-3

1. On a vu dans l'exemple précédent que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et en reprenant les calculs déjà effectués, on a :
$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0, \quad \partial_1 f(1,2) = 4 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(1,2) = 13$$
donc :
$$\nabla f(0,0) = (0,0) \quad \text{et} \quad \nabla f(1,2) = (4,13)$$

2. De même, en reprenant les calculs effectués dans l'exemple précédent, on obtient :
$$\partial_1\, g(\pi,1,1) = 0, \quad \partial_2\, g(\pi,1,1) = 2 \quad \text{et} \quad \partial_3\, g(\pi,1,1) = 2+\mathrm{e}$$
donc :
$$\nabla g(\pi,1,1) = (0,2,2+\mathrm{e})$$

Correction de l'exercice 26-4

La fonction $(x,y) \mapsto x^4+y^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ donc la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^4+y^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
Enfin, cette fonction prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 26-5

Les fonctions $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto -x^2+2xy^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonctions polynômes), à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla(f)(x,y) = \left(\mathrm{e}^{x+y} - 2x + 2y^2, \mathrm{e}^{x+y} + 4xy\right)$$

donc f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(-1,1)$, qui est :

$$\begin{aligned} f(-1+x,1+y) &= f(-1,1) + \langle \nabla f(-1,1),(x,y)\rangle + ||(x,y)||\,\varepsilon(x,y) \\ &= -2+4x-3y+||(x,y)||\,\varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

où ε est une fonction continue et nulle en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 26-6

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}^2$. Si elle admet un extremum en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a : $\nabla f(x,y) = 0$. De plus, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = -4x+4y+2 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = -8y+4x$$

et donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = 0 &\iff \begin{cases} -4x+4y+2=0 \\ -8y+4x=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\iff \begin{cases} -4x+4y+2=0 \\ -4y+2=0 \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(1,\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, si f admet un extremum sur $\mathbb{R}^2$, c'est en $(x_0,y_0) = \left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_0+x,y_0+y) - f(x_0,y_0) &= 3 - 2\,(1+x)^2 - 4\left(\frac{1}{2}+y\right)^2 + 4(1+x)\left(\frac{1}{2}+y\right) + 2(1+x) - 4 \\ &= -2x^2+4xy-4y^2 \\ &= -2\left(x^2-2xy+2y^2\right) \\ &= -2(x-y)^2 - 2y^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_0+x,y_0+y) \leqslant f(x_0,y_0)$$

donc $f(x_0,y_0) = 4$ est le maximum global de f sur $\mathbb{R}^2$, et c'est l'unique extremum de f.

Sommaire