21 Intégrales généralisées

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Intégrales impropres

A.1. Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 21.1

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

i. Si $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et si f une fonction continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que l'intégrale existe) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures ; dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ii. Si $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et si f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que l'intégrale existe) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures ; dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans les deux cas, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Remarques

a. Autrement dit, si f est une fonction continue sur $[a, b[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les primitives de f sur $[a, b[$ ont une limite finie en b. Ainsi, si f est une fonction continue sur $[a, b[$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors, pour tout primitive F de f sur $[a, b[$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

b. De même, si f est une fonction continue sur $]a, b]$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les primitives de f sur $]a, b]$ ont une limite finie en a. Ainsi, si f est une fonction continue sur $]a, b]$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors, pour tout primitive F de f sur $]a, b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - \lim_{x\to a} F(x)$$

c. On déduit de manière immédiate de la définition que, si f est continue sur $[a, b[$ et si $c \in [a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

d. De même, si f est continue sur $]a,b]$ et si $c \in]a,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

e. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, cette définition est conforme avec la définition usuelle de l'intégrale de f sur $[a,b]$.

f. Étudier la nature (ou l'existence) d'une intégrale, c'est déterminer si cette intégrale est convergente ou divergente.

Exercice 21.1 Déterminer la nature et la valeur en cas de convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 21.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$ et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Exercice 21.2 Démontrer la proposition 21.2.

Définition 21.3

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge s'il existe un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Proposition 21.4

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$. S'il existe un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes, alors la somme $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est indépendante de c.
De plus, si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors, pour tout réel c appartenant à $]a,b[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et l'on note alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve Comme f est continue sur $]a,b[$, elle admet une primitive F. Supposons alors qu'il existe un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes. On a alors :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = F(c) - \lim_{x\to a} F(x) \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - F(c)$$

et alors :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x),$$

ce qui prouve que la somme $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est indépendante de c.
Par ailleurs, comme f est continue sur $]a,b[$, alors on a, d'après la relation de Chasles :

$$\forall c' \in\,]a,b[\,,\ \forall x \in\,]a,b[\,,\ \int_x^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en a, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout c' appartenant à $]a,b[$. De même, on prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout c' appartenant à $]a,b[$.

□

Exercice 21.3 Déterminer la nature, et la valeur en cas de convergence, des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$.

Définition 21.5

Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une suite de réels telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1} < a_p = b$$

Soit f une fonction continue sur $]a_0,a_1[, \ldots,]a_{p-1},a_p[$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Si une intégrale est plusieurs fois impropre, il est nécessaire d'étudier séparément la convergence en chaque point avant de conclure. On ne peut les étudier simultanément. Par exemple, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{x} = 0$$

Pourtant, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Définition 21.6

Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant b < a \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]b,a[$.
On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 21.7

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ ou $a > b$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. Si f est prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque Dans ce cas, on dit parfois que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est « faussement impropre » mais il est préférable d'éviter cette expression, qui ne plait pas toujours.

Preuve On note g le prolongement continu sur $[a, b]$ de f. g admet alors une primitive G, continue sur $[a, b]$ et on a alors :

$$\forall x \in [a, b[\,,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ = G(x) - G(a)$$

et donc, comme G est continue en b :

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

ce qui prouve que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

A.2. Un critère nécessaire de convergence

Théorème 21.8

Soient a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et **si la fonction f admet une limite en $+\infty$** alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Preuve On suppose que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que f admette une limite ℓ en $+\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell \neq 0$.
On traite le cas où ℓ est un réel strictement positif ou $+\infty$ (le cas où ℓ est strictement négatif ou $-\infty$ s'en déduit en substituant $-f$ à f) et on note $A = \dfrac{\ell}{2}$ si ℓ est réel et $A = 1$ sinon. Par définition de la limite, il existe alors un réel $a_0 \geqslant a$ tel que :

$$\forall t \geqslant a_0,\ f(t) \geqslant A$$

et alors, par croissance de l'intégration :

$$\forall x \geqslant a_0,\quad \int_{a_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{a_0}^x A\,\mathrm{d}t \\ \geqslant A\,(x - a_0)$$

et alors, d'après la relation de Chasles :

$$\forall x \geqslant a_0,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant A\,(x - a_0) + \int_a^{a_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, comme $A > 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[A\,(x - a_0) + \int_a^{a_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = +\infty$$

et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc il y a contradiction. □

Remarques

a. Ce résultat ne fait pas partie du programme, mais il est fondamental et il est donc important de savoir le démontrer rapidement. On notera en particulier qu'on en déduit, par contraposée, que si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ admettant une limite non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

b. Attention, si un grand nombre de définitions et propriétés conduisent à faire une analogie entre intégrales impropres et séries, on constate que le critère nécessaire de convergence n'est pas le même. En effet, alors que la convergence de la série $\sum u_n$ implique que la suite u converge vers 0, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'implique pas l'existence d'une limite pour f en $+\infty$.

A.3. Les intégrales de Riemann

Théorème 21.9

Soit α un réel quelconque.

i. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

ii. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha < 1$.

iii. Pour tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{b} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^{b} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ convergent si et seulement si : $\alpha < 1$.

Exercice 21.4 Démontrer le théorème 21.9.

Remarques

a. Ces résultats sont fondamentaux et seront largement utilisés avec les résultats du paragraphe C.2 pour étudier la nature d'une intégrale impropre.

b. Attention aux bornes. Ainsi, quel que soit le réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente puisque, quelle que soit la valeur de α, l'une au moins des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente et qu'il n'y a pas de « compensation » possible d'après la définition 21.3.

B. Règles de calcul sur les intégrales impropres

Dans toute cette section, on désigne par a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Les résultats présentés ici sont des conséquences immédiates des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, de l'algèbre des limites et de la conservation des inégalités par passage à la limite, et c'est pourquoi nous n'en présentons pas de preuve ici.

B.1. Linéarité de l'intégration

Théorème 21.10

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$, sauf peut-être en un nombre fini de points et (λ, μ) un couple de réels.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques

a. Cette propriété fait que l'ensemble E des fonctions continues sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points telles que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. De même, si f et g sont deux fonctions continues sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t$ diverge.

c. En revanche, si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux divergentes, on ne peut rien dire quant à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t$.

d. Sur l'espace vectoriel E décrit plus haut, l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire, c'est-à-dire :

Théorème 21.11 ▶ Linéarité de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a,b[$, sauf peut-être en un nombre fini de points et (λ,μ) un couple de réels.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :

$$\int_a^b [\lambda f(t)+\mu g(t)]\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

B.2. Relation de Chasles

Théorème 21.12 ▶ Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points et c un élément de $]a,b[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

B.3. Croissance de l'intégration

Théorème 21.13 ▶ Positivité de l'intégration

Soit f une fonction continue et positive sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $a \leqslant b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Théorème 21.14

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

i. Si f est positive, si f n'est pas constante nulle sur $]a,b[$ et si $a<b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

ii. Si f est de signe constant et si $a \neq b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall t \in\,]a,b[\,,\ f(t)=0$$

Théorème 21.15 ▶ Croissance de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a,b[$ telles que :

$$\forall t \in\,]a,b[\,,\ f(t) \leqslant g(t)$$

Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et si $a \leqslant b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

B.4. Changement de variable

Théorème 21.16

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$. Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ avec :

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques

a. Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, alors φ est strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$.

b. Attention à ne pas écrire l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ tant que la convergence de l'une au moins des deux intégrales n'a pas été prouvée.

c. « Les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats » (extrait du programme officiel).

Preuve

Pour simplifier la rédaction, on suppose que f est continue sur $[a,b[$ et que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante de $[\alpha,\beta[$ sur $[a,b[$. On a donc :

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t\to b} \varphi(t) = b$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta[$ et à valeurs dans $[a,b[$ et comme f est continue sur $[a,b[$, la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ est continue sur $[\alpha,\beta[$.

On peut alors écrire, en effectuant le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (pour $\alpha \leqslant x < \beta$) :

$$\forall x \in [\alpha, \beta[\,,\ \int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{21.1}$$

De même, comme φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha, \beta[$ sur $[a, b[$, on obtient, en effectuant le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$ (pour $a \leqslant x < b$) :

$$\forall x \in [\alpha, \beta[\,,\ \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{21.2}$$

- ◇ Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ soit convergente. On a alors :

$$\lim_{x\to\beta} \varphi(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X\to b} \int_a^X f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

  et donc, d'après (21.1) :

$$\lim_{x\to\beta} \int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

  ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

- ◇ Supposons maintenant que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On a alors :

$$\lim_{x\to b} \varphi^{-1}(x) = \beta \quad \text{et} \quad \lim_{X\to\beta} \int_\alpha^X f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

  et donc, d'après (21.2) :

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

  ce qui prouve que l'intégrale $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ converge et que :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Exercice 21.5 À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et déterminer sa valeur.

Proposition 21.17

Soient a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $0 < a \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]-a, a[$, sauf peut-être en un nombre fini de points.

i. Si f est paire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

ii. Si f est impaire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate du théorème de changement de variable et de la relation de Chasles. Il suffit en effet de démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et de comparer leurs valeurs. Or la fonction $t \mapsto -t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, a[$ sur $]-a, 0]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = -t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on peut affirmer que les intégrales

$$\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature et égales en cas de convergence. Par conséquent, si f est paire ou impaire, les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et, en cas de convergence :

- si f est paire, alors $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u$,
- si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u$,

ce qui achève la preuve grâce à la relation de Chasles.

□

B.5. Intégration par parties

« L'intégration par parties sera pratiquée sur un segment [sur lequel la fonction intégrée est continue] et on effectuera ensuite un passage à la limite ».

Exercice 21.6 À l'aide d'une intégration par parties, étudier la nature, et la valeur en cas de convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

C. Intégrales impropres d'une fonction positive

Dans toute cette partie, a désigne un réel et b un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que : $a < b \leqslant +\infty$.

C.1. Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 21.18

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Preuve Si f est une fonction continue sur $[a,b[$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a,b[$ donc, comme f est positive sur $[a,b[$, F est croissante et admet donc une limite finie en b à gauche si et seulement si elle est majorée (théorème de la limite monotone). ☐

Remarques

a. On peut également remarquer que, si f est une fonction continue et positive sur $[a,b[$ et si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\forall x \in [a,b[\,,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

b. De même, si $b \in \mathbb{R}$, si $-\infty \leqslant a < b$ et si la fonction f est continue et positive sur $]a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (qui est une primitive de $-f$) est décroissante sur $]a,b]$ donc admet une limite finie en a à droite si et seulement si elle est majorée (attention, on a bien dit majorée, et non minorée). Par conséquent, si f est continue et positive sur $]a,b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a,b]$.

C.2. Critères de comparaison

Les résultats énoncés dans ce paragraphe sont fondamentaux : dans la majeure partie des cas, c'est l'utilisation de l'un de ces théorèmes qui servira à étudier la nature d'une intégrale impropre.

Théorème 21.19 ▶ Comparaison par majoration

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que :

$$\forall t \in [a,b[\,,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

i. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

ii. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge également.

Théorème 21.20 ▶ Comparaison par équivalence

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$ telles que :

$$f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$$

Les intégrales $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarques

a. Dans les hypothèses, il suffit en fait que l'une des deux fonctions soit positive sur un voisinage de b inclus dans $[a,b[$. En effet, il existe alors un intervalle $[c,b[$ inclus dans $[a,b[$ sur lequel f et g sont toutes deux positives (deux fonctions équivalentes en un point étant de même signe au voisinage de ce point).

b. Ce résultat est encore vrai si les fonctions f et g sont négatives sur $[a,b[$ puisque, dans ce cas, on peut l'appliquer à $-f$ et $-g$.

Théorème 21.21 ▶ Comparaison par négligeabilité

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que :

$$f(t) \underset{t \to b}{=} \circ(g(t))$$

i. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

ii. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge également.

Remarques

a. On établit des résultats analogues aux trois théorèmes précédents dans le cas de fonctions continues et positives sur $]a, b]$.

b. Parmi les différents critères de comparaison, on pourra noter que le critère par négligeabilité s'avérera particulièrement utile pour étudier la nature d'une intégrale impropre, notamment en comparant avec une intégrale de Riemann de référence :

Méthode 21.22

i. **Si f est une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$** :

- pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, on peut chercher un réel $\alpha > 1$ tel que :

$$f(t) \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$$

- pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, on peut chercher un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que :

$$\frac{1}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} \circ(f(t)) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$$

ii. ***Si f est une fonction continue et positive sur $]0, a]$*** :

- *pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, on peut chercher un réel $\alpha < 1$ tel que :*

$$f(t) \underset{0}{=} \circ\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{t \to 0} t^\alpha f(t) = 0$$

- *pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, on peut chercher un réel $\alpha \geqslant 1$ tel que :*

$$\frac{1}{t^\alpha} \underset{0^+}{=} \circ(f(t)) \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = +\infty$$

Le plus souvent, on étudiera la limite de l'une des fonctions $t \mapsto t^2 f(t)$ ou $t \mapsto \sqrt{t} f(t)$ en 0 ou en $+\infty$, le choix se faisant selon que l'on cherche à prouver que l'intégrale est convergente ou divergente.

Exercice 21.7 Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^6}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

D. Absolue convergence et semi-convergence

Dans toute cette partie, on désigne par a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$.

Définition 21.23

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 21.24

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarques

a. Ce résultat est fondamental puisqu'il permettra dans de nombreuses situations de prouver la convergence d'une intégrale impropre d'une fonction n'étant pas de signe constant en appliquant par exemple les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives à la fonction $|f|$.

b. Attention, il n'y a pas équivalence et l'on ne peut donc rien dire quant à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge.

c. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 21.8

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. (a) Démontrer que :
$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1-\cos(2t)}{2t} \geqslant 0$$
   (b) Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Théorème 21.25

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et si $a \leqslant b$, alors :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Preuve

On a :
$$\forall t \in\ ]a,b[\,,\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$$
Comme les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et comme $a \leqslant b$, on en déduit, par croissance de l'intégration :
$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

□

E. La fonction Γ

Théorème 21.26

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si x appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
On définit alors une fonction, appelée fonction Gamma et notée Γ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 21.9 Démontrer le théorème 21.26.

Proposition 21.27

La fonction Γ a les propriétés suivantes :
i. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
ii. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$

Exercice 21.10 Démontrer le théorème 21.27.

Remarques

a. Le programme stipule « pour le calcul des moments de la loi γ, on pourra établir $\Gamma(\nu+1) = \nu\,\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout n de $\mathbb{N}$ ». Cette formulation semble indiquer que les résultats de la proposition 21.27 ne sont *a priori* pas au programme et il est donc préférable de bien savoir les démontrer.

b. Il peut être intéressant de se souvenir que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Cependant, ce résultat ne fait pas partie du programme.

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 21-1

► La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$ comme fonction rationnelle définie sur $[0,1[$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= [-\ln|1-t|]_0^x \\ &= -\ln(1-x)\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = +\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.

► La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x \\ &= 1-\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

► Les fonctions $t \mapsto t$ et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]0,1]\,,\ \int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= -x\ln(x) - 1 + x\end{aligned}$$

De plus, par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

Correction de l'exercice 21-2

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Plusieurs cas se présentent alors :

◇ Si $\alpha = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x 1\cdot\mathrm{d}t\\ &= x\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-0\cdot t}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

◇ Si $\alpha > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}\end{aligned}$$

et donc, comme $-\alpha < 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

◇ Si $\alpha < 0$, on a de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$$

et donc, comme $-\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 21-3

► La fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$. De même, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \int_x^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_x^0 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{1}{2}$. Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

► La fonction $t \mapsto t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\mathrm{d}t = +\infty$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ est divergente, ce qui suffit pour conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 21-4

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et on a, si $\alpha \neq 1$:

$$\forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

De plus, si $\alpha = 1$, on a :

$$\forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x)$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. De même, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$ et on a :

$$\forall x \in \left]0, 1\right],\ \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et alors :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. De même, si $a < b$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a, b[$ et on a :

$$\forall x \in \left[a, b\right[,\ \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}-(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et alors :

$$\lim_{x\to b} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Le raisonnement est analogue pour l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$.

Correction de l'exercice 21-5

La fonction $t \mapsto 1-t^2$ est continue et strictement positive sur $[0,1[$ et la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$.

De plus, la fonction sin est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,1[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est de même nature, et valeur en cas de convergence, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}}\\ &= \frac{\cos(\theta)}{|\cos(\theta)|}\end{aligned}$$

et comme la fonction cos est positive sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\forall \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} = 1$$

Ainsi, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$ converge.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot \mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarque Le lecteur cultivé aura remarqué que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la dérivée de la fonction arcsin sur $]-1,1[$. Cependant, cette fonction n'étant pas au programme, ce résultat ne peut être utilisé aux concours.

Correction de l'exercice 21-6

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x t \times \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

Or les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ (primitive de $t \mapsto -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^x\\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{2}\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$-\frac{x}{2\,(1+x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2\,(1+x^2)} = 0$$

et donc, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 21-7

► La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0$$

d'où :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

► La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t-1}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [1,+\infty[,\ \frac{1}{t+\sqrt{t-1}} = \frac{1}{t\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t}}\right)}$$

et donc, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}\right) = 1$:

$$\frac{1}{t+\sqrt{t-1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t-1}}$ est divergente.

► La fonction $t \mapsto \dfrac{t^6}{\sqrt{1-t}}$ est continue et positive sur $[0,1[$ et on a :

$$\frac{t^6}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est convergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^6}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Correction de l'exercice 21-8

1. Soit $x \in [1,+\infty[$. Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\cos(t)\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (21.1)\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$$

donc d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

Par ailleurs on a :

$$\forall 1 \in [1,+\infty[,\ \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente donc, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$. On en déduit, avec (21.1), que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) On a :

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant 1$$

et donc, en multipliant par $|\sin(t)|$:

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ |\sin(t)| \geqslant |\sin(t)|^2 \geqslant 0$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ \cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

donc, comme $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$:

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

On en déduit :

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

d'où :

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ |\sin(t)| \geqslant \frac{1-\cos(2t)}{2t} \geqslant 0$$

(b) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2}\times\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(2x)}{4x} - \frac{\sin(2)}{4} + \frac{1}{4}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or on a :

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ \left|\frac{\sin(2x)}{4x}\right| \leqslant \frac{1}{4x}$$

donc, par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x} = 0$$

Par ailleurs on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[\,,\quad \left|\frac{\sin(2t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

On en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet donc une limite finie en $+\infty$, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui nous permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

(c) On a :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\quad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \geqslant 0$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$ est divergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}\right)\mathrm{d}t$ est divergente. On en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$ est divergente.

Correction de l'exercice 21-9

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$

d'où :

$$t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Par ailleurs, on a :

$$t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1}$$

soit encore :

$$t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x$ est strictement inférieur à 1, donc si et seulement si x appartient à $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si x appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si x est strictement positif.

Correction de l'exercice 21-10

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (a, b) un couple de réels tels que $0 < a < b$. On pose :

$$I(a, b) = \int_a^b t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= a^x\,\mathrm{e}^{-a} - b^x\,\mathrm{e}^{-b} + x\int_a^b t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De plus, comme x est strictement positif, on a :

$$\lim_{a\to 0} a^x\,\mathrm{e}^{-a} = 0$$

et par croissances comparées :

$$\lim_{b\to+\infty} b^x\,\mathrm{e}^{-b} = 0$$

donc, en faisant tendre successivement a vers 0 puis b vers $+\infty$ (ce qui est possible car les intégrales $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ convergent) :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

2. D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!}$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{\Gamma(n)}{(n-1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Enfin, d'après 21.2, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!} = \Gamma(1) = 1$$

et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

G. Pour aller plus loin

Preuve du théorème 21.24

Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ soit convergente. On considère les fonctions f_+ et f_- définies par :

$$\forall t \in\,]a,b[\,,\ f_+(t) = \max(f(t),0) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$

et :

$$f_-(t) = \max(-f(t),0) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(t) \geqslant 0 \\ -f(t) & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall t \in\,]a,b[\,,\ f(t) = f_+(t) - f_-(t)$$

De plus, comme f est continue sur $]a,b[$, f_+ et f_- sont des fonctions continues sur $]a,b[$ et on a :

$$\forall t \in\,]a,b[\,,\ 0 \leqslant f_+(t) \leqslant |f(t)| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_-(t) \leqslant |f(t)|$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f_+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f_-(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

Sommaire