20 Formules de Taylor. Développements limités

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Formules de Taylor

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et (a, b) est un couple d'éléments de I.

A.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 20.1 ▶ Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques

a. La formule de Taylor avec reste intégral s'applique quel que soit l'ordre entre a et b.

b. Ce résultat sera souvent utile dans les situations où l'on cherche à comparer une fonction avec une fonction polynôme.

c. Ce résultat est très souvent utile en analyse, notamment parce qu'il permet de déterminer la nature et la somme de séries dont le terme général est de la forme $\dfrac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a)$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur le segment d'extrémités a et b.

Exercice 20.1 En procédant par récurrence, démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 20.2 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Exercice 20.3 Montrer que, s'il existe un entier naturel n tel que f soit de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur I et tel que $f^{(n+1)}$ soit constante nulle, alors f est polynômiale sur I.

A.2. Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème 20.2 ▶ Formule de Taylor pour les polynômes

Si P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

Remarque Ce résultat, déjà vu et démontré dans le chapitre 5. Polynômes, peut également être démontré en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n et en remarquant que le reste intégral est nul puisque, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P^{(n+1)} = 0$.

A.3. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 20.3 ▶ Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

Exercice 20.4 Démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange (on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).

Remarques

a. De même que dans le cas de la formule de Taylor avec reste intégral, l'inégalité de Taylor-Lagrange s'applique quel que soit l'ordre entre a et b.

b. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $\left|f^{(n+1)}\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc on a :

$$\sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right| = \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

c. Par définition, $\sup\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$ est le plus petit majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a,b]$, donc on peut lui substituer n'importe quel majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$, mais cela donne une majoration moins précise.

Exercice 20.5 Pour tout réel x, démontrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut e^x.

A.4. Formule de Taylor-Young

Théorème 20.4 ▶ Formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

Remarques

a. La formule de Taylor-Young donne une approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un point. Elle sera donc particulièrement utile dans les questions de recherche de limite ou d'équivalent.

b. On dit souvent que la formule de Taylor-Young est locale. Cela ne signifie pas qu'elle n'est pas vraie lorsque x est « loin » de a, mais qu'elle n'a d'intérêt que lorsque x est « proche » de a (car le reste est alors proche de 0).

Exercice 20.6 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, a un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(a)$.

Exercice 20.7 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et a un réels tel que : $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. En utilisant la formule de Taylor-Young, démontrer que $f(a)$ est un minimum local de f.

B. Développements limités

Dans toute cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a est un élément de I, f est une fonction définie sur I sauf peut-être en a et n est un entier naturel. On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

B.1. Généralités

Définition 20.5

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe une famille $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels et une fonction ε définie sur I telles que :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n\, \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

autrement dit telles que :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

Dans ce cas, la fonction polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$ est appelée **partie régulière** et la fonction $x \mapsto (x-a)^n\, \varepsilon(x)$ est appelée **reste** du développement limité à l'ordre n.

Remarques

a. Pour des raisons de simplicité d'écriture, on privilégie en général la seconde écriture (avec « petit o ») mais il est en général plus simple, pour éviter les erreurs de calcul avec les « petit o », d'utiliser la première.

b. Pour simplifier les notations, on se ramène souvent à une étude locale en 0, en remarquant qu'il est équivalent de dire que f admet un développement limité à l'ordre n en a et de dire que la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n) \iff f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k h^k + \circ(h^n)$$

c. Compte tenu de la définition, on déduit immédiatement de la formule de Taylor-Young que :

Théorème 20.6

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un développement limité en tout point de I.

B.2. Application des développements limités

Afin d'éviter les erreurs dans les calculs faisant intervenir des développements limités, il est important de bien comprendre que, au voisinage de a, si n et p sont deux entiers naturels quelconques et si α est un réel **non nul** :

i. $\circ((x-a)^n)) + \circ((x-a)^n) = \circ((x-a)^n)$

ii. $\circ((x-a)^n)) - \circ((x-a)^n) = \circ((x-a)^n)$

iii. $(x-a)^p \circ((x-a)^n) = \circ((x-a)^{n+p})$

iv. $\dfrac{\circ((x-a)^n)}{(x-a)^p} = \circ((x-a)^{n-p})$

v. si $n > p$, alors : $\circ((x-a)^p) + \circ((x-a)^n) = \circ((x-a)^p)$

On en déduit alors le résultat suivant, qui est un résultat fondamental dans les questions de calcul de limite ou de recherche d'équivalent :

Proposition 20.7

Si P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n et si f admet un développement limité en a de la forme :

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + \circ((x-a)^n)$$

alors :

i. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} P(x-a) = P(0)$

ii. si P n'est pas le polynôme nul : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} P(x-a)$

Remarques

a. Ce résultat est l'un des résultats majeurs sur les développements limités. Il permettra en effet de déterminer un équivalent simple d'une fonction (et donc de calculer des limites) dans des cas où on ne peut pas trouver d'équivalent directement en raison d'opérations incompatibles avec les équivalents (comme la somme ou la composition). En effet, comme un développement limité est une égalité, toutes les opérations usuelles sont possibles avec les développements limités.

b. Attention à ne pas oublier l'hypothèse de non nullité de la partie régulière. En effet, on a par exemple :

$$x^2 \underset{0}{=} 0 + \circ(x)$$

mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas équivalente à la fonction nulle en 0. Rappelons en effet que seules les fonctions constantes nulles sur un voisinage (éventuellement épointé) de 0 sont équivalentes à la fonction nulle.

B.3. Unicité du développement limité

Proposition 20.8

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, sa partie régulière et son reste sont uniques ; autrement dit, s'il existe deux familles $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ de réels tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \alpha_k = \beta_k$$

Exercice 20.8 On suppose que I est un intervalle centré en 0. Montrer que, si f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Montrer que, si f est paire, la partie régulière de son développement limité à l'ordre n en 0 n'a que des monômes de degrés pairs et que, si f est impaire, la partie régulière de son développement limité à l'ordre n en 0 n'a que des monômes de degrés impairs.

Proposition 20.9

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a et si celui-ci est :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^n)$$

alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un développement limité à l'ordre p en a et :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^p)$$

Preuve Notons déjà qu'il existe une fonction ε définie sur I et de limite nulle en a telle que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n\, \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^p \underbrace{\left[\sum_{k=p+1}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-p} + (x-a)^{n-p}\, \varepsilon(x)\right]}_{=\varepsilon_1(x)}\end{aligned}$$

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$, et donc :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + \circ((x-a)^p)$$

□

Remarque Si f admet un développement limité à l'ordre n en a et si sa partie régulière est $P_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$, alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k$ est appelée **troncature** de P_n à l'ordre p.

B.4. Développements limités usuels en 0

Théorème 20.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle admet un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$$

Preuve La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après 20.6, admet un développement limité à tout ordre en 0. De plus, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ e^x &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, \exp^{(k)}(0) + \circ(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n)\end{aligned}$$

□

Théorème 20.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \circ(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$$

Preuve La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ donc, d'après 20.6, admet un développement limité à tout ordre en 0. De plus, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+x) &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \circ(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \circ(x^n)\end{aligned}$$

De plus, on démontrerait par récurrence (laissée au soin du lecteur) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \circ(x^n)$$

□

Théorème 20.12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admettent un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \circ(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \circ(x^n) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + \circ(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \circ(x^n)\end{aligned}$$

Preuve La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ donc, d'après 20.6, admet un développement limité à tout ordre en 0. De plus, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^\alpha &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \circ(x^n) \\ &\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + \circ(x^n)\end{aligned}$$

De plus, on démontrerait par récurrence (laissée au soin du lecteur) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} + \circ(x^n)$$

□

Théorème 20.13

Les fonctions cos et sin admettent un développement limité à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$$

Preuve

- La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après 20.6, admet un développement limité à tout ordre en 0. De plus, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \circ(x^n)$$

De plus, on démontrerait par récurrence (laissée au soin du lecteur) que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \cos^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n})$$

- La preuve est analogue pour la fonction sin.

□

Remarques

a. On peut noter que le candidat connaissant les résultats sur les séries exponentielles et géométriques retiendra aisément les développements limités des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

b. De même, le candidat connaissant la formule du binôme de Newton retrouvera aisément le développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0. Il suffit de se souvenir que, si α est un entier naturel :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

B.5. Propriété des fonctions continues, des fonctions dérivables

Proposition 20.14

Si f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a, f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a et dans ce cas :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \circ(1)$$

Preuve

- Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 0 en a. Il existe alors un réel α tel que :

$$f(x) \underset{a}{=} \alpha + \circ(1)$$

et alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

Or on sait que, comme f est définie en a, si elle admet une limite en a, alors elle est continue en a.

- Supposons que f soit continue en a. Alors la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ tend vers 0 en a donc :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{=} \circ(1)$$

soit encore :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \circ(1)$$

□

Proposition 20.15

Si f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \circ(x-a)$$

Preuve

◇ Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(x) \underset{a}{=} \alpha + \beta(x-a) + \circ(x-a)$$

D'après 20.9, f admet alors un développement limité à l'ordre 0 en a, de la forme

$$f(x) \underset{a}{=} \alpha + \circ(1)$$

D'après la proposition précédente, f est alors continue en a et $\alpha = f(a)$. On a alors :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \beta(x-a) + \circ(x-a)$$

et donc :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} \beta + \circ(1)$$

d'où :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta$$

ce qui prouve que f est dérivable en a.

◇ Supposons que f soit dérivable en a. On a alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

soit encore :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} f'(a) + \circ(1)$$

et donc :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \circ(x-a)$$

□

Remarques

a. Attention, ce résultat ne se généralise pas au cas des développements limités d'ordre supérieur ou égal à 2. Par exemple, la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 2 (on peut vérifier que $g(x) \underset{0}{=} \circ(x^2)$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0. Le lecteur assidu pourra ainsi vérifier que g est dérivable en 0, que $g'(0) = 0$ et que la fonction

$$x \mapsto \frac{g(x)-g'(0)}{x-0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite en 0.

b. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, on a vu qu'alors :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \circ(x-a)$$

On peut reconnaître l'équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

c. Si f est définie en a et admet un développement limité à l'ordre 2 en a, celui-ci permet dans certains cas d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans le plan repéré par rapport à sa tangente T_a au point d'abscisse a. En effet, si le développement limité de f en a à l'ordre 2 est de la forme

$$f(x) \underset{a}{=} \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 + \circ((x-a)^2)$$

alors les propositions 20.9 et 20.15 permettent d'affirmer que :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \gamma(x-a)^2 + \circ((x-a)^2)$$

et donc :

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \underset{a}{=} \gamma(x-a)^2 + \circ((x-a)^2)$$

Si $\gamma \neq 0$, on a alors :

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \underset{x\to a}{\sim} \gamma(x-a)^2$$

Comme deux fonctions équivalentes en a sont de même signe au voisinage de a, on en déduit qu'au voisinage de a, $\mathscr{C}$ est au dessus de T_a si $\gamma > 0$ et en dessous si $\gamma < 0$.

B.6. Opérations sur les développements limités

Proposition 20.16

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a et si leurs parties régulières respectives sont $\mathrm{Reg}_n(f)$ et $\mathrm{Reg}_n(g)$, alors :

1. $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en a, dont la partie régulière est :

$$\mathrm{Reg}_n(f+g) = \mathrm{Reg}_n(f) + \mathrm{Reg}_n(g)$$

2. fg admet un développement limité à l'ordre n en a, dont la partie régulière $\mathrm{Reg}_n(fg)$ est la troncature à l'ordre n de $\mathrm{Reg}_n(f)\times\mathrm{Reg}_n(g)$ (*i.e.* la fonction polynôme obtenue en ne conservant que les monômes de degré inférieur ou égal à n).

Exercice 20.9

1. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0, déterminer un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \sin(x) - \mathrm{e}^x + 1$.
2. Déterminer un équivalent de $g : x \mapsto \left(1 + \mathrm{e}^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - 4$ en $\frac{\pi}{2}$.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 20-1

On démontre par récurrence que, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, la proposition

$$\mathscr{H}(p) : \text{ « } f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t \text{ »}$$

est vraie.

◇ Pour $p = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, f' est continue sur I et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a) + [f(b) - f(a)] \\ &= f(b)\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\mathscr{H}(p)$ soit vraie. On a donc :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme les fonctions $t \mapsto -\dfrac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!}$ et $f^{(p+1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc : $\mathscr{H}(p) \Longrightarrow \mathscr{H}(p+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, donc en particulier, pour $p = n$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction de l'exercice 20-2

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^+$ donc, d'après la formule de Taylor de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre 0 et x :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \exp(3)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{(x-t)^2}{2} \mathrm{e}^t$ est continue et positive sur $[0, x]$ avec $x \geqslant 0$ donc, par croissance de l'intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Correction de l'exercice 20-3

On suppose que n est un entier naturel, que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et que $f^{(n+1)}$ est nulle sur I. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral entre $a \in I$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

donc f est polynômiale sur I.

Correction de l'exercice 20-4

Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|=\left|\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $a \leqslant b$, alors, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[a,b]$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|\leqslant\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,\left|f^{(n+1)}(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

  De plus, comme $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$ et on a :

$$\forall t\in[a,b],\ \frac{(b-t)^n}{n!}\,\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant\frac{(b-t)^n}{n!}\,\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|$$

  et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[a,b]$, avec $a\leqslant b$:

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|&\leqslant\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b\\&\leqslant\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|\end{aligned}$$

- Si $a>b$, on obtient de même :

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|&\leqslant\int_b^a\frac{(t-b)^n}{n!}\,\left|f^{(n+1)}(t)\right|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\sup_{[b,a]}\left|f^{(n+1)}\right|\,\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b\\&\leqslant\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}\,\sup_{[b,a]}\left|f^{(n+1)}\right|\end{aligned}$$

On a donc bien démontré le résultat attendu dans tous les cas.

Correction de l'exercice 20-5

Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe donc un réel a strictement positif tel que x appartienne à $[-a,a]$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,\exp^{(k)}(0)\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\sup_{t\in[-a,a]}\left|\exp^{(n+1)}(t)\right|$$

et donc, comme $\exp^{(k)}=\exp$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et comme la fonction exponentielle est croissante sur $[-a,a]$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^a$$

De plus, on a vu dans le chapitre 16. Suites, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Correction de l'exercice 20-6

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, comme f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

donc, comme $g(a)=f'(a)$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

donc g est continue en a. Enfin, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{a\},\ g'(x)=\frac{(x-a)\,f'(x)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

De plus, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a :

$$f(x)\underset{a}{=}f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)+\circ((x-a)^2)$$

donc :

$$(x-a)\,f'(x)-[f(x)-f(a)]\underset{a}{=}(x-a)[f'(x)-f'(a)]-\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)+\circ((x-a)^2)$$

et donc :

$$g'(x)\underset{a}{=}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-\frac{f''(a)}{2}+\circ(1)$$

et finalement, comme f' est dérivable en a :

$$\lim_{x\to a} g'(x)=f''(a)-\frac{f''(a)}{2}=\frac{f''(a)}{2}$$

Finalement, on a prouvé que g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et que g' admet une limite finie en a, donc on peut conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$g'(a)=\frac{f''(a)}{2}$$

Correction de l'exercice 20-7

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}f(x)&\underset{a}{=}f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)+\circ((x-a)^2)\\&\underset{a}{=}f(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)+\circ((x-a)^2)\end{aligned}$$

et alors :

$$f(x)-f(a)\underset{a}{=}\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)+\circ((x-a)^2)$$

Comme $f''(a)\neq 0$, on a donc :

$$f(x)-f(a)\underset{x\to a}{\sim}\frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)$$

Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{(x-a)^2}{2}\,f''(a)$ est positive sur $\mathbb{R}$ et comme deux fonctions équivalentes en a sont de même signe au voisinage de a, il existe donc un réel $\alpha>0$ tel que :

$$\forall x\in\,]-\alpha,\alpha[\,,\ f(a)-f(a)\geqslant 0$$

ce qui prouve que $f(a)$ est un minimum local de f.

Correction de l'exercice 20-8

On suppose que le développement limité de f en 0 est de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + \circ(x^n)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$, on a alors :

$$f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k x^k + \circ(x^n)$$

◇ Si f est paire, alors on a :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + \circ(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k x^k + \circ(x^n)$$

et donc, par unicité du développement limité :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \alpha_k = (-1)^k \alpha_k$$

d'où :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\ /\ k \text{ est impair},\ \alpha_k = 0$$

ce qui prouve que la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0 n'a que des monômes de degré pair.

◇ Si f est impaire, alors on a :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + \circ(x^n) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k x^k + \circ(x^n)$$

et donc, par unicité du développement limité :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \alpha_k = -(-1)^k \alpha_k$$

d'où :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\ /\ k \text{ est pair},\ \alpha_k = 0$$

ce qui prouve que la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0 n'a que des monômes de degré impair.

Correction de l'exercice 20-9

1. D'après 20.10 et 20.13, on a :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x + \circ(x2) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

d'où :

$$\sin(x) - \mathrm{e}^x + 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

et donc :

$$\sin(x) - \mathrm{e}^x + 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

2. On a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et donc, d'après 20.10 et 20.13 :

$$\mathrm{e}^{x-\frac{\pi}{2}} \underset{\frac{\pi}{2}}{=} 1 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 + \circ\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2\right)$$

et alors :

$$g(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{=} \left[2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \left[2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 + \circ\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2\right)\right] - 4$$

et en développant le produit et en tronquant à l'ordre 2 (*i.e.* en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2, les autres étant négligeables devant $x \mapsto \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2$ en $\frac{\pi}{2}$) :

$$g(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{=} 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

et finalement :

$$g(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} 2x - \pi$$

Correction de l'exercice 20-10

1. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $x \in \mathbb{R}$, en notant S_x le segment d'extrémités 0 et x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{2} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right| \leqslant \frac{|x|^3}{3!} \sup_{S_x} \left|\exp^{(3)}\right|$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right| &\leqslant \frac{|x|^3}{6} \sup_{t \in S_x} \left|\mathrm{e}^t\right| \\ &\leqslant |x|^3 \sup_{t \in S_x} \left|\mathrm{e}^t\right|\end{aligned}$$

De plus, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sup_{t \in S_x} \left|\mathrm{e}^t\right| = \begin{cases} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{|x|} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et donc, dans tous les cas :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sup_{t \in S_x} \left|\mathrm{e}^t\right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right| \leqslant |x|^3\ \mathrm{e}^{|x|}}$$

2. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

◇ La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

$$\sin^{(1)} = \cos, \quad \sin^{(2)} = -\sin, \quad \sin^{(3)} = -\cos \quad \text{et} \quad \sin^{(4)} = \sin$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 3 entre 0 et x, on a donc :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De plus, on a, la fonction sin étant positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall t \in [0, x], \ \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) \geqslant 0$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc :

$$\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$$

◇ De même, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on obtient :

$$\sin(x) = x - \int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall t \in [0, x],\ \ t\sin(t) \geqslant 0$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x t\,\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc :

$$\sin(x) \leqslant x$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x}$$

3. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

◇ La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

$$\cos^{(1)} = -\sin, \quad \cos^{(2)} = -\cos, \quad \cos^{(3)} = \sin, \quad \cos^{(4)} = \cos \quad \text{et} \quad \cos^{(5)} = -\sin.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 4 entre 0 et x, on a donc :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\cos^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus, on a, la fonction sin étant positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall t \in [0, x],\ \ \frac{(x-t)^4}{4!}\,\sin(t) \geqslant 0$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc :

$$\cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

◇ De même, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on obtient :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{t^2}{2}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall t \in [0,x],\ \frac{t^2}{2}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0,x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x \frac{t^2}{2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc :

$$\cos(x) \geqslant 1-\frac{x^2}{2}$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

◇ La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe C^4 sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(t)=\frac{1}{1+t},\quad f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2},\quad f^{(3)}(t)=\frac{2}{(1+t)^3}\quad \text{et}\quad f^{(4)}(t)=-\frac{6}{(1+t)^4}$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 3 entre 0 et x, on a donc :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k+\int_0^x \frac{t^3}{3!}\,f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\int_0^x \frac{t^3}{(1+t)^4}$$

De plus, on a :

$$\forall t \in [0,x],\ \frac{t^3}{(1+t)^4} \geqslant 0$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0,x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x \frac{t^3}{3!}\,f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

d'où :

$$\ln(1+x) \leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

◇ De même, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 2 entre 0 et x, on obtient :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k+\int_0^x \frac{t^2}{2!}\,f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\int_0^x \frac{t^2}{(1+t)^3}$$

De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^3}$ étant décroissante sur $[0,x]$, on a :

$$\forall t \in [0,x],\ \frac{1}{(1+t)^3} \geqslant \frac{1}{(1+x)^3}$$

d'où :

$$\forall t \in [0,x],\ \frac{t^2}{(1+t)^3} \geqslant \frac{t^2}{(1+x)^3}$$

et donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2}{2!}\, f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^x \frac{t^2}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \left[\frac{t^3}{3(1+x)^3}\right]_0^x \\ &\geqslant \frac{x^3}{3(1+x)^3}\end{aligned}$$

d'où :

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3}$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction $f : t \mapsto \sqrt[3]{1+t}$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$ donc, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre 0 et x à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \int_0^3 \frac{(x-t)^2}{2}\, f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) &= (1+t)^{\frac{1}{3}} \\ f'(t) &= \frac{1}{3}\,(1+t)^{-\frac{2}{3}} \\ f''(t) &= -\frac{2}{9}\,(1+t)^{-\frac{5}{3}} \\ f^{(3)}(t) &= \frac{10}{27}\,(1+t)^{-\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{27}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^{\frac{8}{3}}}\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall t \in [0, x]\,,\ 0 \leqslant \frac{(x-t)^2}{(1+t)^{\frac{8}{3}}} \leqslant (x-t)^2$$

donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[0, x]$, avec $0 \leqslant x$:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^{\frac{8}{3}}}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^x (x-t)^2\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left[-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x \\ &\leqslant \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leqslant \frac{5x^3}{81}}$$

D. Pour aller plus loin

Preuve de la proposition 20.8

On peut déjà remarquer que :

$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^k = \circ((x-a)^n)$$

On raisonne par l'absurde, en supposant que $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n)$ et on note :

$$p=\min\{k\in [\![0,n]\!] \ / \ \alpha_k\neq\beta_k\}$$

On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^k = \circ((x-a)^n)$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x\in I,\ \sum_{k=p}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^k=(x-a)^n\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

et, en divisant par $(x-a)^p$:

$$\forall x\in I \ / \ x\neq a,\ \sum_{k=p}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^{k-p}=(x-a)^{n-p}\,\varepsilon(x)$$

et alors, en faisant tendre x vers a, les fonctions polynômes étant continues en a comme $n-p\geqslant 0$:

$$\alpha_p-\beta_p=0$$

ce qui est absurde et prouve le résultat attendu.

Preuve de la proposition 20.16

i. On a :

$$f(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(f)(x)+\circ((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(g)(x)+\circ((x-a)^n)$$

et donc :

$$f(x)+g(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(f)(x)+\mathrm{Reg}_n(g)(x)+\circ((x-a)^n)$$

Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{Reg}_n(f)+\mathrm{Reg}_n(g)$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n pour voir que l'on a trouvé le développement limité de $f+g$ à l'ordre n en 0.

ii. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a, continues et nulles en a et telles que :

$$f(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(f)(x)+(x-a)^n\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(g)(x)+(x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

et alors :

$$f(x)g(x)\underset{a}{=}\mathrm{Reg}_n(f)(x)\times\mathrm{Reg}_n(g)(x)+(x-a)^n\underbrace{\left[\mathrm{Reg}_n(f)(x)\,\varepsilon_1(x)+\mathrm{Reg}_n(g)(x)\,\varepsilon_2(x)+(x-a)^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right]}_{\varepsilon_3(x)}$$

Notons alors :

$$\mathrm{Reg}_n(f)\times\mathrm{Reg}_n(g)=\sum_{k=0}^{2n}\alpha_kX^k,\quad T_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_kX^k \quad \text{et} \quad R_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\alpha_kX^k$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{a}{=} T_n(x)+R_n(x)+(x-a)^n\varepsilon_3(x)\\ &= T_n(x)+(x-a)^n\underbrace{\left[\sum_{k=n+1}^{2n}\alpha_k(x-a)^{k-n}+\varepsilon_3(x)\right]}_{\varepsilon(x)}\end{aligned}$$

et comme ε a une limite nulle en 0 :

$$f(x)g(x)\underset{a}{=}T_n(x)+\circ((x-a)^n)$$

ce qui est les résultat attendu puisque T_n est la partie tronquée à l'ordre n de $\mathrm{Reg}_n(f)\times\mathrm{Reg}_n(g)$.

Sommaire