23 Séries numériques

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Généralités

A.1. Série

Définition 23.1

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

- Le couple de suite $((u_n)_{n\geqslant n_0}, (S_n)_{n\geqslant n_0})$ est appelé **série de terme général u_n**.
- Pour tout $n \geqslant n_0$, S_n est appelé **somme partielle d'ordre n** de la série.
- La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée **suite des sommes partielles** de la série de terme général u_n.

Remarques

a. Attention à ne pas confondre la série de terme général u_n et la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$. Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est positive, on peut remarquer que la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante, mais il serait très maladroit de dire que la série de terme général u_n est croissante, car cela n'a pas de sens.

b. Pour parler de la série de terme général u_n, on écrit en général « la série $\sum u_n$ » ou aussi, parfois, « la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ », cette dernière notation ayant l'avantage de préciser le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

c. Dans la mesure où toute suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie à partir du rang n_0 peut se ramener à une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par changement d'indice (en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+n_0}$) et pour simplifier les notations, on suppose dans la suite du cours que : $n_0 = 0$.

Nature d'une série

Dans la suite de cette partie, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des somme partielle de la série $\sum u_n$.

Définition 23.2

i. On dit que la série $\sum u_n$ converge (ou est une **série convergente**) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de cette suite est notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et appelée **somme de la série $\sum u_n$** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ii. On dit que la série $\sum u_n$ diverge (ou est une **série divergente**) lorsqu'elle ne converge pas.

Remarques

a. Déterminer la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

b. On dira que la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe dans le cas ou la série $\sum u_n$ converge.

c. On établira plus tard des résultats permettant d'étudier la nature d'une série simplement. Mais on utilisera le plus souvent la définition pour répondre à une question du type « déterminer la nature et la somme éventuelle de la série de terme général u_n ». Les résultats qui seront établis dans la suite ne permettent en général pas de calculer la somme de la série.

d. On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes. Autrement dit, si u et v sont deux suites pour lesquelles il existe un entier naturel p tel que $u_n = v_n$ lorsque $n \geqslant p$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

e. Attention à ne pas confondre les notations $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la première est une notation pour la série, tandis que la seconde n'a de sens que si la série converge et, dans ce cas, désigne la somme de la série (donc un réel, pas une série).

f. Attention à ne pas écrire d'égalité du type $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$ tant que la convergence de la série n'a pas été établie.

g. Comme on ne confond pas suite des sommes partielles et série, il ne faudra pas confondre somme d'une série et limite : si la série $\sum u_n$ converge et si sa somme vaut S, il serait donc maladroit d'écrire que « la série $\sum u_n$ converge vers S ».

Exercice 23.1 Étudier la nature et, en cas de convergence, déterminer la somme de la série de terme général u_n où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Exercice 23.2 En minorant $\frac{1}{n}$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est appelée **série harmonique**.

Théorème 23.3 ▶ Critère nécessaire de convergence

Si la suite u est telle que la série $\sum u_n$ converge, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Preuve On suppose que la série $\sum u_n$ converge. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Or, comme la série $\sum u_n$ converge, on a, en notant S sa somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$$

□

Remarques

a. Attention à ce théorème, car **sa réciproque est fausse !** Par exemple, on a vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, bien que son terme général converge vers 0.

b. Le principal intérêt de ce théorème réside dans sa contraposée :

Proposition 23.4

Si la suite u ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 23.3 Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)$.

Proposition 23.5

Soient u et v deux suites réelles, λ un réel.

i. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \lambda u_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge et si $\lambda \neq 0$, alors la série $\sum \lambda u_n$ diverge.

iii. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum u_n + v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

iv. Si la série $\sum u_n$ converge et si la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Preuve

i. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, de somme S. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda S$$

ce qui prouve que la série $\sum \lambda u_n$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

ii. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et que $\lambda \neq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum \lambda u_n$ converge. Alors, d'après le point précédent, la série $\sum \frac{1}{\lambda} \times \lambda u_n$ converge, ce qui est absurde, donc la série $\sum \lambda u_n$ diverge.

iii. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, de sommes respectives U et V. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$$

et alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = U + V$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n + v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

iv. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum(u_n + v_n)$ converge. D'après les résultats précédents, on en déduit que la série $\sum((u_n + v_n) + (-u_n))$ converge, ce qui est absurde, donc la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

□

Remarques

a. Comme on peut vérifier facilement que la série de terme général 0 converge, ces propriétés permettent de montrer que l'ensemble des suites réelles u telles que la série $\sum u_n$ converge, muni de l'addition de deux suites et de la multiplication d'une suite par un réel, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, sur cet espace vectoriel, l'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

b. Attention : si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes deux divergentes, on ne peut rien dire quant à la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$. Pour s'en convaincre, on réfléchira à la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$ dans le cas où, d'une part, u et v sont constantes égales à 1 et, d'autre part, où u est constante égale à 1 et v constante égale à -1.

A.2. Reste d'une série convergente

Définition 23.6

On suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.
Pour tout entier naturel n, on appelle **reste d'ordre n de la série de terme général u_n** le réel R_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$$

Remarque Attention, le reste d'une série n'existe que si la série est convergente.

Proposition 23.7

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite des restes converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$$

Preuve On suppose que la série $\sum u_n$ converge, de somme S. Avec les notations de la définition 23.6, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

□

A.3. Séries « télescopiques »

Exercice 23.4 La **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Remarques

a. Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il est très classique, donc il faut savoir le démontrer.

b. Dans la mesure où, dans ce chapitre, serons établis des résultats permettant d'étudier la nature d'une série, ils seront également utiles pour étudier la nature d'une suite : pour étudier la convergence ou la divergence de la suite u, on peut en effet étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 23.5 Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$.

B. Séries de référence

B.1. Séries de Riemann

Théorème 23.8

Soit α un réel. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Exercice 23.6 On se propose de démontrer le théorème 23.8.

1. Prouver que, si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha = 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \neq 1$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

(a) Justifier que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

(b) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

(c) On suppose que α appartient à $]0,1[$. Prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

(d) On suppose que α appartient à $]1,+\infty[$. Prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Remarque On verra plus tard que ce résultat sera particulièrement utile pour étudier la nature d'une série.

B.2. Séries géométriques

Théorème 23.9

Soit q un réel. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Exercice 23.7 Démontrer le théorème 23.9.

B.3. Séries géométriques « dérivées »

Théorème 23.10

Soit q un réel. Les séries $\sum n\, q^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si : $|q|<1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Preuve

- On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nq^{n-1} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

On peut déjà remarquer que, si $|q| \geqslant 1$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc la suite u ne peut converger vers 0 et donc, d'après 23.3, la série $\sum u_n$ diverge si $|q| \geqslant 1$. On suppose maintenant que : $|q|<1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction rationnelle $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[,\ f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Par ailleurs, comme $|q|<1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge si $|q|<1$ et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

- De même, on pose :

$$\forall n \geqslant 2,\ v_n = n(n-1)q^{n-2} \quad \text{et} \quad S''_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$$

On peut encore remarquer que, si $|q| \geqslant 1$, la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc la suite v ne peut converger vers 0 et donc, d'après 23.3, la série $\sum v_n$ diverge si $|q| \geqslant 1$. On suppose maintenant que : $|q|<1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction rationnelle $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et on obtient, en dérivant deux fois :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{-n(n+1)x^{n-1}(1-x)^2 + 2[1-(n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^3}$$

et en particulier :

$$\forall n \geqslant 2,\ S''_n = \frac{-n(n+1)q^{n-1}(1-q)^2 + 2[1-(n+1)q^n + nq^{n+1}]}{(1-q)^3}$$

Par ailleurs, comme $|q|<1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} nq^n = \lim_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S''_n = \frac{2}{(1-q)^3}$$

ce qui prouve que la série $\sum v_n$ converge si $|q| < 1$ et que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

Remarque En cas de doute sur la somme d'une série géométrique dérivée convergente, on pourra retenir que ce que l'on a démontré revient à dire que, dans le cas des séries géométriques, « la dérivée de la somme infinie est égale à la somme infinie des dérivées ». Cependant, il ne s'agit là que d'un moyen mnémotechnique et non d'un moyen de preuve, car on ne sait pas, avec les outils du programme, dériver une somme infinie.

B.4. Séries exponentielles

Théorème 23.11

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

Preuve Ce résultat sera démontré dans le chapitre 20. □

C. Séries à termes positifs

Les résultats présentés dans cette partie sont fondamentaux car ils seront utilisés dans la plupart des cas pour étudier la nature d'une série. Pour éviter de graves erreurs, on notera que, dans tous les résultats énoncés dans cette partie (que l'on regroupera ensuite sous la même appellation « critères de comparaison des séries à termes positifs ») :

- **les suites envisagées sont toutes à termes positifs à partir d'un certain rang**,
- pour étudier la nature d'une série avec les critères de comparaison, on ne s'intéresse qu'à son terme général (et donc pas question de somme ici...).

Dans toute cette partie, on considère deux suites réelles u et v.

Proposition 23.12

Si u est une suite positive à partir d'un certain rang n_0, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Preuve On suppose que u est une suite positive. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc si et seulement si elle est majorée. □

Remarque Ce résultat n'est pas mentionné dans le programme officiel, mais nous sera utile pour démontrer les résultats qui suivent. C'est pourquoi nous en soulignons l'importance ici.

C.1. Comparaison par majoration

Théorème 23.13

On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

i. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge également.

Preuve

i. On suppose que la série $\sum v_n$ converge et on note :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Par hypothèse, on a :

$$\forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k$$

et donc (en supposant, ce qui ne nuit en rien à la preuve : $p \geqslant 1$) :

$$\forall n \geqslant p,\ S_n \leqslant T_n - T_{p-1} + S_{p-1}$$

De plus, d'après 23.12 et comme la série $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc il existe un réel M tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ S_n \leqslant M - T_{p-1} + S_{p-1}$$

donc la suite $(S_n)_{n\geqslant p}$ est majorée. Comme la suite u est positive, on en déduit, de nouveau grâce à 23.12, que la série $\sum u_n$ converge.

ii. Ce résultat se déduit du précédent par contraposition.

□

Exercice 23.8 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$

C.2. Comparaison par négligeabilité

Théorème 23.14

On suppose que les suites u et v sont positives à partir d'un certain rang et que :

$$u_n = \circ(v_n)$$

i. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge également.

Preuve *i.* On suppose que la série $\sum v_n$ converge et que les suites u et v sont positives à partir du rang n_0. Comme $u_n = \circ(v_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et un entier $n_1 \geqslant n_0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$

De plus, comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un entier $p \geqslant n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ \varepsilon_n \leqslant 1$$

et alors, comme $p \geqslant n_0$:

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

D'après 23.13, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge.

ii. Ce résultat se déduit du précédent par contraposition.

□

Exercice 23.9 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n^3\,\mathrm{e}^{-n^2}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

Remarque On retiendra plus généralement la méthode suivante, qui sera utile dans un grand nombre de situations :

Méthode 23.15 ► S

u est une suite positive (au moins à partir d'un certain rang), pour étudier la nature de la série $\sum u_n$, on peut étudier la limite de la suite $(n^\alpha\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\, u_n = 0$ (en général on essaie avec $\alpha = 2$, alors :

$$u_n = \circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

ce qui permettra de prouver que la série $\sum u_n$ converge.

- S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\, u_n = +\infty$ (en général on essaie avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = \dfrac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{n^\alpha} = \circ(u_n)$$

ce qui permettra de prouver que la série $\sum u_n$ diverge.

C.3. Comparaison par équivalence

Théorème 23.16

On suppose que les suites u et v sont positives à partir d'un certain rang et que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature ; autrement dit, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

Preuve

On peut déjà remarquer que, si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$, donc si l'on prouve que la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$, alors la réciproque sera également vraie et le résultat annoncé sera démontré. On suppose donc que la série $\sum v_n$ converge et que les suites u et v sont positives à partir du rang n_0. Comme $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier $n_1 \geqslant n_0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ u_n = h_n v_n$$

De plus, comme $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, il existe un entier $p \geqslant n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ h_n \leqslant 2$$

et alors, comme $p \geqslant n_0$:

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2\, v_n$$

D'après 23.13, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge.

□

Exercice 23.10 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n!}\right)$

Remarques

a. Comme on l'a vu dans le deuxième exemple, il suffit que les deux suites soient de signe constant à partir d'un certain rang pour appliquer le critère de comparaison par équivalence. En effet, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si les suites sont négatives à partir d'un certain rang, alors $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ et les suites $-u$ et $-v$ sont positives à partir d'un certain rang : les séries $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont donc de même nature, donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b. En pratique, il suffira de s'intéresser au signe de l'une des deux suites seulement pour utiliser le critère de comparaison par équivalence. En effet, on a vu dans le chapitre 15 que, si u et v sont deux suites équivalentes, alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

D. Absolue convergence et semi-convergence

Dans cette partie, on considère une suite u de signe quelconque.

D.1. Absolue convergence

Définition 23.17

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou qu'elle converge absolument) si, et seulement si, la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 23.18

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, il existe deux suites v et w positives telles que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

Preuve On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad w_n = \max(-u_n, 0)$$

Les suites v et w sont positives par définition et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - w_n = \begin{cases} u_n - 0 = u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 - (-u_n) = u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

et donc, dans tous les cas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, on en déduit, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

□

D.2. Un critère suffisant de convergence

Théorème 23.19 ▶ Critère suffisant de convergence

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve

- ◇ Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. D'après 23.18, il existe deux suites v et w telles que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent et telles que :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - w_n$$

  On en déduit la convergence de la série $\sum u_n$ grâce à 23.5.

- ◇ Dans ce cas, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

  et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

  $$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

  c'est-à-dire :

  $$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

□

Remarques

a. Ce résultat, couplé à la partie précédente, est un résultat fondamental pour l'étude des séries dont le terme général n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang.

b. Attention, la réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, on verra en exercice que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ (série harmonique alternée) est convergente, mais pas absolument convergente.

c. Si la série $\sum u_n$ est convergente et si la série $\sum |u_n|$ est divergente, on dit que la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

Exercice 23.11 Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n + \cos(n)}{n^3}$.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 23-1

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= 1-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=1$$

ce qui prouve que la série $\sum\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ converge, de somme 1.

Correction de l'exercice 23-2

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction inverse, est décroissante sur cet intervalle, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]k,k+1[,\ \ln'(x) \leqslant \frac{1}{k}$$

et donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

On en déduit, en sommant ces inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k)] \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

D'après le théorème de prolongement des inégalités, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

ce qui prouve que la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 23-3

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2}\ln(x)=\ln(2)$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)=\ln(2)$$

ce qui prouve, d'après le critère nécessaire de convergence, que la série $\sum\ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)$ diverge.

Correction de l'exercice 23-4

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} - u_0\end{aligned}$$

Dès lors, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc si et seulement si la suite u converge et, dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

ce qui prouve le théorème.

Correction de l'exercice 23-5

On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Comme la suite $\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers 0), on en déduit que la série $\sum \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+n}\right)$ converge et que :

$$\sum \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Correction de l'exercice 23-6

1. On a déjà vu en exemple que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $\alpha = 1$. On peut également remarquer que, si $\alpha = 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 1 et que, si $\alpha < 0$, cette suite diverge vers $+\infty$. Ainsi, si $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le critère nécessaire de convergence 23.3.
2. 1. On peut déjà remarquer que :

   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+1)^\alpha} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

   donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée.

   2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $\alpha > 0$), donc :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

   et alors, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur le segment $[k, k+1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et $k \leqslant k+1$) :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

3. On a donc :

$$\forall k \geqslant 2,\ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

En sommant ces inégalités, on en déduit, avec la relation de Chasles :

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc :

$$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n}$$

soit finalement :

$$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}. \tag{23.1}$$

Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a : $1 - \alpha > 0$ et alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = +\infty$$

et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

4. Si $\alpha > 1$, on a : $1 - \alpha < 0$ et alors, d'après (23.1) :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2,\ S_n &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

Dans ce cas, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée et, d'après la remarque initiale, elle est donc convergente, ce qui prouve que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Correction de l'exercice 23-7

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

On remarque tout d'abord que, si $q = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = n + 1$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

On suppose maintenant que : $q \neq 1$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc (comme dans ce cas $q \neq 1$) si et seulement si q appartient à $]-1, 1[$. Finalement, la série $\sum q^n$ converge si et seulement si : $|q| < 1$. De plus, dans ce cas, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

Correction de l'exercice 23-8

1. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{n^2}$$
Or, d'après 23.8 et comme $2 > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et donc, d'après 23.5, la série $\sum \frac{3}{n^2}$ converge. On en déduit, d'après le critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{2+\cos(n)}{n^2}$ converge.
2. On a :
$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$$
Or, d'après 23.8, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On en déduit, d'après le critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 23-9

1. D'après les croissances comparées, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,\mathrm{e}^{-n^2} = 0$$
d'où :
$$n^3\,\mathrm{e}^{-n^2} = \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge et comme les suites $(n^3\,\mathrm{e}^{-n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives, on en déduit, d'après les critères de comparaison (par négligeabilité) des séries à termes positifs, que la série $\sum n^3\,\mathrm{e}^{-n^2}$ converge.
2. D'après les croissances comparées, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$
et donc :
$$\frac{1}{n} = \circ\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge et comme les suites $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives, on en déduit, d'après les critères de comparaison (par négligeabilité) des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Correction de l'exercice 23-10

1. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$
donc :
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
Comme les suites $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit, d'après 23.16, que la série $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$ diverge.
2. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
donc :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n!}$$

soit encore :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!}$$

Comme les suites $\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n!}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\geqslant 2}$ sont positives et comme la série exponentielle $\sum \frac{1^n}{n!}$ converge, on en déduit, d'après 23.16, que la série $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{n!}\right)$ converge, et donc que la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n!}\right)$ converge.

Correction de l'exercice 23-11

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{(-1)^n+\cos(n)}{n^3}\right| \leqslant \frac{2}{n^3}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente $(3>1)$, on en déduit, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{(-1)^n+\cos(n)}{n^3}$ est absolument convergente, donc convergente.

F. Pour aller plus loin : compléments utiles en probabilités

Dans le programme, les paragraphes qui suivent sont introduits ainsi :
La théorie des familles sommables nest pas au programme. Aucune difficulté concernant la dénombrabilité ne sera soulevée (on pourra si besoin admettre que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable). On admettra le théorème suivant :
Soit I un ensemble dénombrable infini, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I=\{\phi(n),\ n\in\mathbb{N}\}$ où ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation ϕ, et pourra également être notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.
L'étude de cette convergence nest pas un objectif du programme. On dira alors que la série est absolument convergente (ou converge absolument). Toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont alors licites. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement les rappeler.
Par conséquent, les résultats qui suivent seront tous admis et devront être considérés comme culture générale utile en probabilités, mais il n'est pas utile, et encore moins nécessaire, d'y consacrer trop de temps.

F.1. Familles sommables

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de signe quelconque.

Proposition 23.20

Si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors, pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque Pour comprendre certaines définitions énoncées en probabilités, on retiendra que cette propriété est caractéristique des séries absolument convergentes. En effet, si la série $\sum u_n$ n'est que semi-convergente, on peut prouver qu'il existe une application φ bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ soit divergente et même que, pour tout réel α, il existe une application φ bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ soit convergente, de somme égale à α.

Proposition 23.21

Plus généralement, si I est un ensemble dénombrable quelconque alors, pour toute application φ bijective de $\mathbb{N}$ sur I, si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ. Elle est alors notée plus simplement $\sum\limits_{i\in I} u_i$ et on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

F.2. Sommation par paquets

Proposition 23.22

Soient I un ensemble dénombrable et $(I_j)_{j\in J}$ une famille (finie ou infinie) de parties (finies ou infinies) de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels, alors, pour tout $j \in J$ tel que I_j soit infini, la famille $(u_n)_{n\in I_j}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \sum_{k\in I_j} u_k$$

F.3. Théorème de Fubini

Une des applications particulièrement utile en probabilités (notamment pour étudier les couples de variables aléatoires) du résultat précédent est le suivant :

Théorème 23.23

Si $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable, alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

F.4. Produit de séries

Proposition 23.24

Soient I et J deux ensembles dénombrables. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables, alors :

$$\left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$$

Sommaire