22 Intégration sur un segment

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

A. Primitive d'une fonction continue

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et F sont deux fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

A.1. Notion de primitive

Définition 22.1

On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si : $F' = f$.

Exemples 22.1

a. Comme sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme $\sin' = \cos$, la fonction sin est une primitive de la fonction cos sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 22.2

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors f admet une infinité de primitives sur I et l'ensemble des primitives de f est $\{F + k,\ k \in \mathbb{R}\}$.
Par conséquent, si F est une primitive de f sur I et si $a \in I$, alors f admet une unique primitive s'annulant en a, qui est la fonction $x \mapsto F(x) - F(a)$.

Preuve

- Il est immédiat que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $F + k$ est une fonction dérivable, de dérivée f, donc est une primitive de f. Soit alors G une primitive de f. Alors $G - F$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ (G(x) - F)'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, $G - F$ est constante, donc il existe un réel k tel que : $G = F + k$.

- Si F est une primitive de f, la fonction $G : x \mapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f d'après le résultat précédent. De plus, on a directement : $G(a) = 0$. Enfin, si H est une primitive de f qui s'annule en a, alors $G - H$ est constante (d'après le résultat précédent) et s'annule en a, donc $G = H$, ce qui prouve bien l'unicité de la primitive de f s'annulant en a.

□

Remarques

a. Il faut donc éviter de parler de « la primitive de f » puisque, s'il existe une primitive, il y en a une infinité. On dira donc soit « une primitive de f est ... », soit « la primitive de f qui s'annule en a est ... ».

b. Lorsqu'on recherche les primitives d'une fonction continue, il est important de s'assurer que l'on est sur un intervalle pour affirmer que deux primitives diffèrent d'une constante.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet pour primitives, entre autres les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + 3 & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pourtant $f_2 - f_1$ n'est pas une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. Cela est du au fait que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. En revanche, on peut constater que $f_2 - f_1$ est bien constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 22.3

Toute fonction continue sur I admet au moins une primitive sur I.

A.2. Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, f est une fonction continue sur I, F désigne une primitive de f, n est un entier relatif et α est un réel strictement positif. Ces résultats découlent directement des dérivées usuelles.

f	F	I
$x \mapsto x^n$ $(n \geqslant 0)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \leqslant -2)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
cos	sin	$\mathbb{R}$
sin	$-\cos$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	arctan	$\mathbb{R}$

A.3. Primitives remarquables

Les opérations sur les primitives proposées ci-dessous découlent directement des propriétés de la dérivation.

Proposition 22.4

Soit f, g, F et G des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ, μ deux réels, α un réel différent de 1. Si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors :

- λF est une primitive de λf sur I,
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I,
- si $\lambda \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{1}{\lambda} F(\lambda x + \mu)$ est une primitive de $x \mapsto f(\lambda x + \mu)$ sur I,
- $F \times G$ est une primitive de $f \times G + F \times g$ sur I.

Exercice 22.1 Déterminer les primitives des fonctions

$$f : x \mapsto x^2 + 3x - \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{2x+2}{x^2+2x-3} + (1-2x)^2$$

Proposition 22.5

Si F une fonction dérivable sur I, à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, et si G une fonction dérivable sur J, alors $G \circ F$ est une primitive de $F' \times G' \circ F$ sur I.

Remarque En particulier, on peut donc affirmer que, si u est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$:

- $\exp \circ u$ est une primitive de $u' \times \exp \circ u$ sur I,
- si u ne s'annule pas sur I, $\ln \circ |u|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I,
- si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I,
- $\arctan \circ u$ est une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ sur I.

Exercice 22.2 Déterminer les primitive de $f : x \mapsto \dfrac{3x+6}{\sqrt{x^2+4x+1}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

B. Intégrale d'une fonction continue

Dans tout ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I et f est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

B.1. Définition

Théorème 22.6

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F.

Preuve Soit F et G deux primitives de f sur $[a, b]$. D'après 22.2, il existe un réel k tel que : $G = F + k$ et alors :

$$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k] = F(b) - F(a)$$

□

Définition 22.7

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, le réel $F(b) - F(a)$ est appelé **intégrale de f de a à b** et on note :

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction f est appelée **intégrande** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarques **a.** De même que, pour toute famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est indépendante de k (on dit que k est un indice muet), l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la variable x (x est une variable muette) et on notera donc indifféremment

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \cdots$$

b. On déduit de manière immédiate de la définition les deux propositions suivantes :

Proposition 22.8

Si c est une constante réelle alors, pour tout couple (a,b) de réels :

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)$$

Proposition 22.9

Si f est une fonction continue sur I et si a et b sont deux éléments de I, alors :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

B.2. Fonction définie par une intégrale

Théorème 22.10

Si f est continue sur I, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a et c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Preuve Ce résultat est une conséquence immédiate de 22.2. □

Exercice 22.3 Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, démontrer que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.

Remarque Comme on a pu le voir dans l'exemple précédent, il est important dans l'étude de la dérivation et du calcul de la dérivée d'une intégrale fonction de ses bornes, de faire attention à la dérivabilité et à la dérivée des bornes : il s'agit d'une composée.

Théorème 22.11

Si a est un réel positif ou nulle et si f est une fonction continue sur $[-a,a]$, alors :

i. si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

ii. si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Preuve Comme f est continue sur $[-a, a]$, elle admet une primitive F nulle en 0 et la fonction

$$G : x \mapsto \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(-x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ G'(x) &= F'(x) + F'(-x)\\ &= f(x) + f(-x)\end{aligned}$$

◇ Si f est impaire, on en déduit que G' est constante nulle sur $[-a, a]$, donc G est constante et, comme $G(0) = 0$, G est constante nulle. En particulier, on a donc :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = G(a) = 0$$

◇ Si f est paire, on a alors :

$$\forall x \in I,\ G'(x) = 2f(x)$$

donc, comme $G(0) = 0$, G est l'unique primitive de $2f$ qui s'annule en 0, donc : $G = 2F$ et en particulier :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = G(a) = 2F(a) = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

B.3. Propriétés de l'intégration

Dans ce paragraphe, I désigne encore un intervalle de $\mathbb{R}$ et (a, b) est un couple d'éléments de I.

Théorème 22.12 ▶ Linéarité de l'intégration

Si f et g sont continues sur I, on a, pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve Comme f et g sont continues sur I, elles admettent chacune une primitive, respectivement notées F et G. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existent et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x &= [\lambda F(b) + \mu G(b)] - [\lambda F(a) + \mu G(a)]\\ &= \lambda\,[F(b) - F(a)] - \mu\,[G(b) - G(a)]\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Théorème 22.13 ▶ Relation de Chasles

Si f est continue sur I, on a, pour tout $(a, b, c) \in I^3$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur I et, comme a, b et c appartiennent à I, les intégrales $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existent et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x &= F(c) - F(a)\\ &= [F(c) - F(b)] + [F(b) - F(a)]\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Théorème 22.14 ▶ Positivité de l'intégration

Si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $a \leqslant b$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Preuve

Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur $[a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. De plus, comme $f = F'$ est positive sur $[a, b]$, F est croissante sur $[a, b]$, donc, comme $a \leqslant b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geqslant 0$$

□

Théorème 22.15 ▶ Stricte positivité de l'intégration

Si f est continue, positive, non constante nulle sur $[a, b]$ et si $a < b$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

En particulier, on a donc, si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$$

Preuve

Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur $[a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. On suppose alors que :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{22.1}$$

Comme $f = F'$ est positive sur $[a, b]$, F est croissante sur $[a, b]$ et donc, comme $a < b$:

$$\forall x \in [a, b],\ F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$$

et alors, d'après (22.1) :

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) = F(a)$$

donc F est constante sur $[a, b]$ et $F' = f$ est constante nulle sur $[a, b]$. □

Théorème 22.16 ► Croissance de l'intégration

Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si a et b sont deux éléments de I tels que $a \leqslant b$ et :

$$\forall x \in [a,b],\ \ f(x) \leqslant g(x)$$

alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent, si f est continue sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{x\in I}|f(x)|$$

Preuve

- Avec les hypothèses du théorème, $g - f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ donc, par positivité de l'intégration 22.14, comme $a \leqslant b$:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

et par linéarité de l'intégration 22.12 :

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

- Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, $|f|$ est continue sur $[a,b]$. De plus, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ \ -\sup_I |f| \leqslant -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \sup_I |f|$$

On en déduit, par croissance de l'intégration, les fonctions considérées ici étant toutes continues et positives sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$:

$$\int_a^b -\sup_I |f|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b -|f(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \sup_I |f|\ \mathrm{d}x$$

et alors, par linéarité de l'intégration et comme $\sup_I |f|$ est une constante :

$$-(b-a)\sup_{x\in I}|f(x)| \leqslant -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{x\in I}|f(x)|$$

soit finalement :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{x\in I}|f(x)|$$

□

C. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux réels distincts tels que $a < b$.

Définition 22.17

On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $[a,b]$ telle que f soit continue en tout point de $[a,b]$ distinct de $x_1, \ldots, x_n$ et si f admet une limite finie à gauche et à droite en chacun des points $x_1, \ldots, x_n$.

Définition 22.18

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On note $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ et $x_1, \dots, x_n$ les éléments de $]a,b[$ en lesquels f n'est pas continue.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note f_i la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ et on note $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ de f_i.
On appelle intégrale de a à b de f le réel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(x)\,\mathrm{d}x$$

On appelle alors intégrale de b à a de f le réel

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarques

a. Les propriétés 22.12 (linéarité de l'intégration), 22.13 (relation de Chasles), 22.14 (positivité de l'intégration) et 22.16 (croissance de l'intégration) restent valables pour pour des fonctions continues par morceaux.

b. Attention, la propriété 22.15 (stricte positivité de l'intégration) n'est en général plus valable pour une fonction continue par morceaux. On peut par exemple considérer le cas de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, qui est continue par morceaux sur $[0,1]$, positive et non constante nulle, mais dont l'intégrale de 0 à 1 est nulle.

D. Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive

Dans ce paragraphe, le plan est munit d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème 22.19

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.

Dans tout ce paragraphe, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Définition 22.20

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

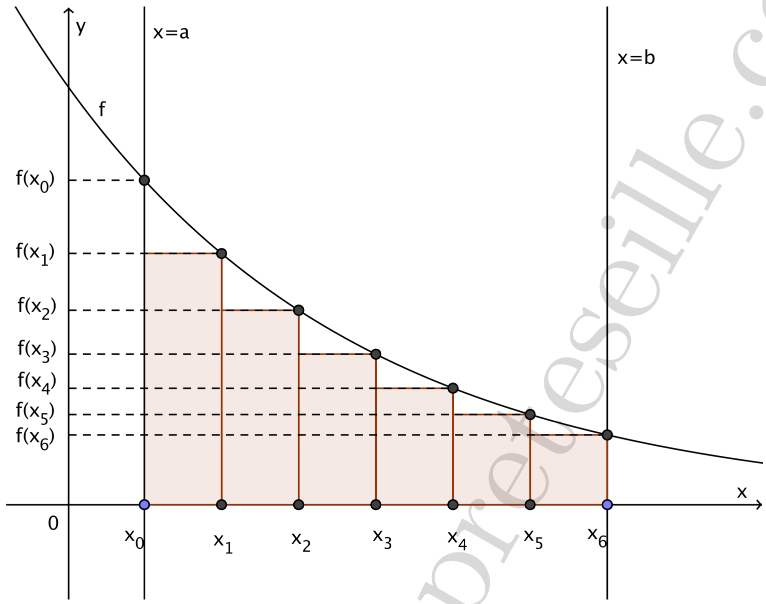
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n et S'_n sont appelées sommes de Riemann à pas constant de f sur $[a,b]$.

Théorème 22.21

Si f est continue sur $[a,b]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque Ce résultat est fondamental parce qu'il permet d'approcher la valeur d'une intégrale. Par exemple, sur le graphique suivant, on pourrait approcher la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme des aires des rectangles grisés qui correspond à la valeur de S_6 dans l'exemple. Plus n est grand, plus la partie grisée sera « proche » du domaine du plan délimité par les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.



Exercice 22.4 On se propose de démontrer le théorème 22.21 dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (conformément au programme). On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ x_{n,k} = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

1. Déterminer la limite de $S_n - S_n'$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\left[\frac{b-a}{n}\,f(x_{n,k}) - \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\right|$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} |f(x_{n,k}) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$

3. (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant M$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,\frac{(b-a)^2}{n}$$

4. Conclure.

Exercice 22.5 Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

E. Intégration par parties, par changement de variable

Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

E.1. Intégration par parties

Théorème 22.22

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x$$

Preuve f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc fg aussi et :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

soit encore :

$$f'g = (fg)' - fg'$$

et alors, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x &= \int_a^b (fg)'(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Exercice 22.6

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\, \mathrm{d}x$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(1+x^2)\, \mathrm{d}x$ (on pourra remarquer que $x^4 = (x^2-1)(x^2+1)+1$).

E.2. Changement de variable

Théorème 22.23

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(J) \subset I$. Pour tout couple (a, b) d'éléments de J, on a :

$$\int_a^b f \circ \varphi(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Pour justifier cette égalité, on dit qu'on a effectué le changement de variable $t = \varphi(x)$

Preuve f est continue sur I donc admet une primitive F et alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f \circ \varphi(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x &= \int_a^b F' \circ \varphi(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= [F \circ \varphi(x)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

Remarques

a. Le programme indique clairement que « les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats ».

b. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur J (donc bijective de J sur $\varphi(J)$, alors, pour tout couple (a,b) d'éléments de J, $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ (en notant $[x,y]$ le segment d'extrémités x et y même si $y < x$). Par conséquent, il suffit dans ce cas que f soit continue sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$ pour que le changement de variable s'applique.

Exercice 22.7 En effectuant le changement de variable $x = \sin^2(u)$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 22-1

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme et exponentielle) et admet donc des primitives. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $x \mapsto x^2$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, donc l'ensemble des primitives de f est :
$$\left\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\,x^2 - \mathrm{e}^x + k,\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ (fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 - x + 3$ est un trinôme et admet donc des primitives sur chacun des intervalles $]-\infty, -3[$, $]-3, 1[$ et $]1, +\infty[$. Pour tout intervalle I égal à $]-\infty, -3[$, $]-3, 1[$ ou $]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln\left|x^2 + 2x - 3\right|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ sur I et la fonction $x \mapsto -\dfrac{(1-2x)^3}{6}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (1-2x)^2$ donc l'ensemble des primitives de f sur I est :
$$\left\{x \mapsto \ln\left|x^2 + 2x - 3\right| - \frac{(1-2x)^3}{6} + k,\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

Correction de l'exercice 22-2

On peut déjà remarquer que la fonction $x \mapsto x^2 + 4x + 1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la dérivée de la fonction $u : x \mapsto x^2 + 4x + 1$ est la fonction $x \mapsto 2x + 4$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$
donc l'ensemble des primitives de f est :
$$\left\{x \mapsto 3\sqrt{x^2 + 4x + 1} + k,\ k \in \mathbb{R}\right\}$$

Correction de l'exercice 22-3

f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F(x^2) - F(x)$$
Comme les fonctions $x \mapsto x^2$ et F sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x)\\ &= 2xf(x^2) - f(x)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22-4

1. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n - S_n = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)]$$
donc :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (S'_n - S_n) = 0}$$

2. (a) On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a = x_{n,0} \leqslant x_{n,1} \leqslant \cdots \leqslant x_{n,n-1} \leqslant x_{n,n} = n$$

D'après la relation de Chasles, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) - \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right] \right|$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left[\frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) - \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right] \right|}$$

(b) On peut remarquer[1] que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{b-a}{n}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) = \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x_{n,k})\,\mathrm{d}x$$

et alors, d'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} [f(x_{n,k}) - f(x)]\,\mathrm{d}x \right|$$

et, par croissance de l'intégration, f étant continue sur les segments $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$, avec $x_{n,k} \leqslant x_{n,k+1}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} |f(x_{n,k}) - f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

3. (a) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, f' étant continue sur le segment $[a,b]$ donc :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } M \text{ tel que : } \forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant M}$$

(b) En particulier, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in \,]x_{n,k}, x_{n,k+1}[\,,\ |f'(x)| \leqslant M$$

Comme, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ et dérivable sur $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$, on en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}]\,,\ |f(x_{n,k}) - f(x)| &\leqslant M\,|x_{n,k} - x| \\ &\leqslant M\,\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

1. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on parle de « pas constant ».

et donc, d'après le résultat de la question 2b et par croissance de l'intégration (les fonctions en présence étant continues sur chaque segment $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ et les bornes étant dans le sens croissant) :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} M\,\frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M\,\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{n,k+1} - x_{n,k}) \\ &\leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{n^2}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,\frac{(b-a)^2}{n}}$$

4. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} M\,\frac{(b-a)^2}{n} = 0$$

D'après le résultat précédent et le théorème de l'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui nous permet de conclure, d'après le résultat de la question 1 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Correction de l'exercice 22-5

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ étant continue sur $[0,1]$, on en déduit, en reconnaissant une somme de Riemann (avec $a = 0$ et $b = 1$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= [\arctan(x)]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}}$$

Correction de l'exercice 22-6

1. La fonction ln est continue sur $[1, \mathrm{e}]$ donc l'intégrale étudiée a un sens. De plus, on peut remarquer que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

On pose alors :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}],\ f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathrm{e}]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \ln(1) - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \cdot \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1}$$

2. Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $g : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \times \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)\right]_0^1\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}}$$

Correction de l'exercice 22-7

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$, donc l'intégrale I existe.

De plus, la fonction $\varphi : u \mapsto \sin^2(u)$ est de classe C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ avec $\varphi\left(\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]\right) = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ donc, en effectuant le changement de variable $x = \sin^2(u)$ $(\mathrm{d}x = 2\cos(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u)$:

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)}\sqrt{1-\sin^2(u)}} \times 2\cos(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(u)\sin(u)}{|\sin(u)|\,|\cos(u)|}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et comme les fonctions sin et cos sont positives sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \, \mathrm{d}u \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{I = \frac{\pi}{3}}$$

Sommaire