21 Compléments sur les fonctions

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Comparaisons de fonctions au voisinage d'un point

Dans cette partie, et sauf mention contraire, a désigne un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur un voisinage de a, éventuellement privé de a.

A.1. Fonction négligeable devant une autre

Définition 21.1

On dit qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} \circ(g)$.

Remarques

a. Si f est négligeable devant g en a, on dit aussi que g est prépondérante sur f en a.

b. L'égalité « $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x))$ » se lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x est au voisinage de a ».

c. En particulier, dire que $f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(1)$ équivaut à dire que f tend vers 0 en a.

d. En pratique, il est rare que l'on doive démontrer dans un problème qu'une fonction est négligeable devant une autre. En revanche, on utilise fréquemment les négligeabilités de référence (voir après).

e. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une négligeabilité en a^- ou en a^+ lorsque a est un réel.

f. De la définition, on déduit de manière immédiate les deux propositions suivantes :

Proposition 21.2

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ\,(g(x)) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarques

a. Attention. Même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

b. On en déduit, grâce aux croissances comparées de référence (dont une preuve est proposée dans le chapitre 19) :

Proposition 21.3 ▶ Négligeabilités de référence en $+\infty$

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a < b$, alors : $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$

ii. $x^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

iii. $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(x^b)$

iv. $(\ln(x))^a \underset{+\infty}{=} \circ(\mathrm{e}^{x^b})$

Proposition 21.4 ▶ Négligeabilités de référence en 0

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. Si $a > b$, alors : $x^a \underset{0}{=} \circ(x^b)$

ii. $(\ln(x))^a \underset{0}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^b}\right)$

Proposition 21.5

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f \underset{a}{=} \circ(h)$.

ii. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$ et $i \underset{a}{=} \circ(j)$, alors : $f \times i \underset{a}{=} \circ(g \times j)$.

iii. Si $f \underset{a}{=} \circ(h)$ et $g \underset{a}{=} \circ(h)$, alors : $f + g \underset{a}{=} \circ(h)$.

iv. Si $f \underset{a}{=} \circ(g)$, alors : $f \times h \underset{a}{=} \circ(g \times h)$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Comme les erreurs sont fréquentes lors d'opérations avec des « petit o », il peut être préférable d'éviter d'utiliser cette notation dans les calculs, préférant la notation explicite $g(x)\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de limite nulle en a à la notation $\circ(g)$.

A.2. Fonctions équivalentes

Définition 21.6

On dit qu'une fonction f est équivalente à une fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\,h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice 21.1 Prouver que : $x^2 - 2x + \cos(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

Remarques

a. La relation « $f \underset{a}{\sim} g$ » se lit « f est équivalente à g au voisinage de a ».

b. Attention, contrairement à ce que l'on pourrait croire, deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point a ne sont pas nécessairement à peu près égales au voisinage de ce point. On peut juste dire qu'elles ont le même comportement, ou que leurs courbes représentatives ont la même allure au voisinage de a. Par exemple, on peut vérifier que $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$; pourtant $(x^2 + x) - x^2 = x$ n'est pas proche de 0 au voisinage de $+\infty$.

c. En cas de besoin, on adaptera la définition pour une équivalence en a^- ou en a^+ si $a \in \mathbb{R}$.

d. De la définition, on déduit de manière immédiate les propositions et théorèmes suivants :

Proposition 21.7

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque Attention. Encore une fois, même si c'est le plus souvent cette proposition qui sera utilisée, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens au voisinage de a !!!

Théorème 21.8

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

Remarque Ce résultat est un des principaux résultats de ce paragraphe : pour déterminer la limite d'une fonction en un point, il suffit donc d'en déterminer un équivalent simple.

Exemple 21.1 Comme on a établit que $x^2 - 2x + \cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 2x + \cos(x)\right) = +\infty$$

Proposition 21.9

Si f et g sont deux fonctions équivalentes en a, il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Exercice 21.2 Démontrer la propositoion 21.9.

Théorème 21.10

Si ℓ est un réel **non nul** et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 21.7.

b. Attention : il est fondamental de s'assurer que ℓ est un réel non nul pour dire qu'une fonction tendant vers ℓ en a est équivalente à ℓ en a. En effet, compte tenu de la définition, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, il existe une fonction h tendant vers 1 en a telle que, quand x est au voisinage de a :

$$f(x) = 0 \times h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

Par conséquent, seules les fonctions constantes nulles au voisinage de a sont équivalentes à la fonction nulle.

Proposition 21.11

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a :

$$f \underset{a}{=} \circ(g) \Longrightarrow f + g \underset{a}{\sim} g$$

Preuve On suppose que : $f \underset{a}{=} \circ(g)$. Il existe alors une fonction ε tendant vers 0 en a et un voisinage V_a de a tels que :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

On a alors :

$$\forall x \in V_a,\ f(x) + g(x) = g(x)\underbrace{[1+\varepsilon(x)]}_{h(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

donc :

$$f + g \underset{a}{\sim} g$$

□

Remarque On déduit de cette proposition, de 21.3 et de 21.4 le résultat fondamental suivant :

Proposition 21.12

Une fonction polynôme non nulle est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ à son monôme de plus haut degré et en 0 à son monôme de plus base degré.

Autrement dit, si (n, p) est un couple d'entiers naturels tel que $p < n$ et si $P : x \mapsto \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynôme telle que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n, \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

Proposition 21.13

Soit f, g, h, i et j des fonctions définies au voisinage de a.

i. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.

ii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} j$, alors : $f \times i \underset{a}{\sim} g \times j$.

iii. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a : $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

iv. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

v. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g sont strictement positives au voisinage de a, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la définition.

b. Il n'est pas possible de sommer des équivalents, car le résultat n'est pas correct en général. Par exemple, on a :

$$x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \quad \text{et} \quad -x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$$

mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) + (-x) = 1$ et 1 n'est pas équivalent à $x + (-x) = 0$ au voisinage de $+\infty$ (ni ailleurs). Pour déterminer un équivalent d'une somme, on pourra chercher à factoriser le terme prépondérant ou utiliser la définition.

Proposition 21.14 ► Équivalents de référence

Soit α un réel quelconque.

$$\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x \qquad 1-\cos(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x \qquad \ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x$$

Exercice 21.3 On se propose de démontrer les trois premiers équivalents. Les derniers seront démontrés dans le chapitre 24.

1. En utilisant 18.45, démontrer que : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. À l'aide des formules de trigonométrie, en déduire : $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
3. Établir finalement : $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

B. Dérivées successives

B.1. Dérivées successives

Définition 21.15

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

i. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I. La dérivée de f est appelée **dérivée seconde** de f et notée f'' ou $f^{(2)}$.

ii. Plus généralement, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dit que f est k fois dérivable sur I si f est $k-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I. La dérivée de $f^{(k-1)}$ est alors appelée **dérivée $k^{\text{ème}}$** de f et notée $f^{(k)}$.

iii. On dit que f est infiniment dérivable sur I si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k fois dérivable sur I.

Remarque Par analogie, on note : $f^{(0)} = f$.

Théorème 21.16 ▶ Formule de Leibniz

Soit n un entier naturel, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Le produit $f \times g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Exercice 21.4 Démontrer la proposition 21.16.

Remarque Comme f et g jouent des rôles symétriques, on a aussi, si f et g sont n fois dérivables sur I :

$$(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} \times f^{(n-k)}$$

On choisira en général la première ou la seconde écriture en choisissant de dériver k fois la fonction la plus compliquée et $n-k$ fois la fonction la plus simple ou bien, si possible, de dériver k fois une éventuelle fonction polynôme (car ses dérivées sont nulles à partir d'un certain rang).

Théorème 21.17

Soit n un entier naturel, f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et h une fonction de classe C^n sur un intervalle J.

i. Pour tout réel λ, λf est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

ii. $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

iii. $f\times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

iv. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

v. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

vi. Si f est dérivable sur I et prend ses valeurs dans J et si h est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque Ces résultats se démontrent par récurrence.

Proposition 21.18

Les fonctions polynômes, rationnelles, logarithme, exponentielle et trigonométriques (cos, sin et tan) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines de définition respectifs.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ et plus généralement les fonctions puissances sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

C. Fonctions convexes, concaves

Dans toute cette partie, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. De plus, toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f et g sont deux fonctions définies sur I, on dit que la courbe représentative de f est au-dessus de celle de g si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant g(x)$$

De même, on dit que la courbe représentative de f est en dessous de celle de g si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$$

C.1. Généralités

Définition 21.19

i. On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

ii. On dit que f est **concave** sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

Remarques

a. Dans ces définitions, seules les valeurs de λ appartenant à $]0, 1[$ importent, puisque, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, il y a toujours égalité.

b. Autrement dit, une fonction convexe est une fonction dont le graphe est en dessous de ses cordes et une fonction concave est une fonction dont le graphe est au dessus de ses cordes.
Ci-dessous un exemple de représentation graphique d'une fonction convexe ainsi que de la corde $[AB]$ joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$:

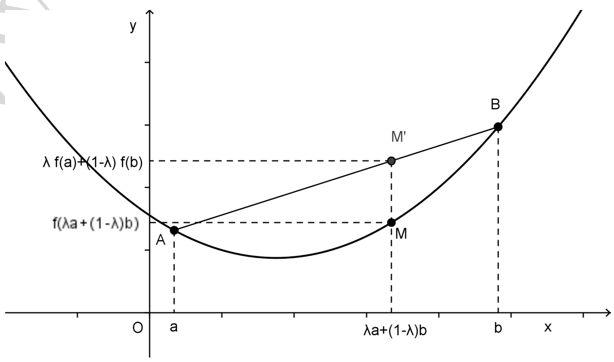

Figure 21.1 – Exemple de représentation graphique d'une fonction convexe

Définition 21.20

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overset{\circ}{I}$. On dit que le point de coordonnées $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ soit inclus dans I et tel que :

- ou bien f est convexe sur $]a-\alpha, a]$ et concave sur $[a, a+\alpha[$,
- ou bien f est concave sur $]a-\alpha, a]$ et convexe sur $[a, a+\alpha[$.

Théorème 21.21 ▶ Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Preuve On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{P}(n)$:

$$\text{« } \forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in I^n,\ \forall (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in (\mathbb{R}^+)^n \ / \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \text{ »}$$

est vraie.

◇ $\mathscr{P}(1)$ est vraie (c'est une égalité).

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et considérons une famille $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ d'éléments de I et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

On suppose tout d'abord que λ_{n+1} est différent de 1. On a alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or λ_{n+1} appartient à $[0,1]$ et on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} \leqslant 1$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

donc, comme $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à I et comme I est un intervalle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k \in I$$

Il en découle, comme f est convexe :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})\, f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence et comme $1-\lambda_{n+1} \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leqslant (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Par ailleurs, si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, donc l'inégalité est encore vraie (c'est même une égalité dans ce cas).

Finalement $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ On peut maintenant conclure que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

C.2. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 21.22

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I,
2. f' est croissante sur I,
3. la courbe représentative de f est « au dessus » de toutes ses tangentes.

Exemples 21.2

a. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La fonction sin est concave sur $[0,\pi]$ et plus généralement sur tout intervalle du type $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et convexe sur $[-\pi,0]$ et plus généralement sur tout intervalle du type $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Sur le graphique suivant (représentant la fonction sin), on constate que :

- sur $[0,\pi]$, la courbe représentative de sin est « en dessous » de toutes ses tangentes,
- les tangentes respectives à la courbe représentative de sin aux points d'abscisse 0 et π traversent la courbe : ces points sont des points d'inflexion.

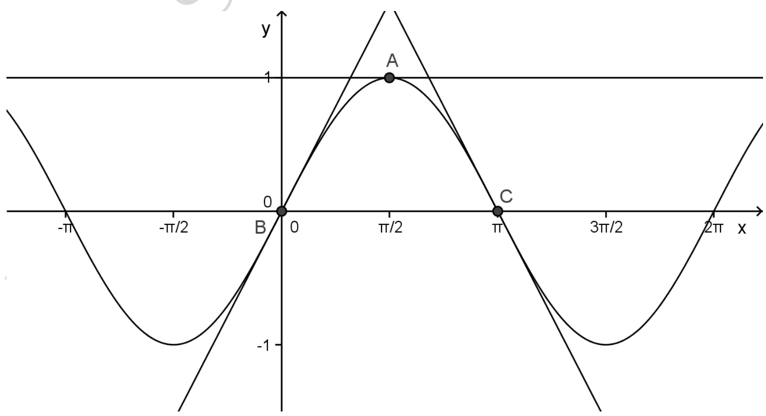

FIGURE 21.2 – Graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$

Remarques

a. La preuve de ce théorème est proposée dans la section « Pour aller plus loin ».

b. Ces résultats restent valables si f est dérivable sur I et si f' n'est pas continue sur I (d'ailleurs la preuve qui est proposée ici n'utilise pas la continuité de f'), mais le programme n'envisage que le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Compte tenu de la définition d'une fonction concave, on en déduit de manière immédiate que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est concave sur I,
- f' est décroissante sur I,
- la courbe représentative de f est « en dessous » de toutes ses tangentes.

Exercice 21.5 On se propose de démontrer le théorème 21.22. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1. On suppose que f est convexe sur I.
   (a) Soit $(a,b) \in I^2$ tel que : $a < b$. Démontrer que :
   $$\forall t \in \left]a,b\right[,\ \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \leqslant \frac{f(t)-f(b)}{t-b}$$
   (b) En déduire que f' est croissante sur I.
2. On suppose que f' est croissante sur I. Démontrer que :
   $$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0)$$
3. On suppose enfin que :
   $$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0). \tag{21.1}$$
   Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $\lambda \in \left]0,1\right[$. On note $c = \lambda a + (1-\lambda)\,b$.
   i. Démontrer que :
   $$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant f'(c) \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$
   ii. Exprimer λ en fonction de a, b et c et en déduire que :
   $$f(\lambda a + (1-\lambda)\,b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

C.3. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Théorème 21.23

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f est convexe sur I,

ii. f'' est positive ou nulle sur I.

Preuve Ce résultat découle de manière immédiate du théorème 21.22 puisque, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, f' est croissante sur I si et seulement si f'' est positive ou nulle sur I. □

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 21-1

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 - 2x + \cos(x) = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{\cos(x)}{x^2}\right)$$

De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|-\frac{2}{x} + \frac{\cos(x)}{x^2}\right| &\leqslant \frac{2}{x} + \frac{|\cos(x)|}{x^2}\\ &\leqslant \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}+\frac{\cos(x)}{x^2}\right)=0$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{\cos(x)}{x^2}\right)=1$$

ce qui nous permet de conclure :

$$x^2-2x+\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$$

Correction de l'exercice 21-2

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et on distingue les cas selon que a est réel ou non.

- On suppose que $a=+\infty$ (le cas où $a=-\infty$ se traite de manière analogue). Il existe alors une fonction h tendant vers 1 en $+\infty$ et un réel M tels que :

$$\forall x \geqslant M,\ f(x)=g(x)h(x)$$

  De plus, comme h tend vers 1 en $+\infty$, il existe un réel A' tel que :

$$\forall x \geqslant A',\ h(x)>0$$

  Dès lors, en notant $A''=\max(A,A')$, on a :

$$\forall x \geqslant A'',\ f(x)=g(x)h(x) \quad \text{et} \quad h(x)>0$$

  donc f et g sont de même signe sur $[A'',+\infty[$.
- On suppose que a est réel et que f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ (les autres cas se traitant de manière analogue). Il existe alors une fonction h tendant vers 1 en a et un réel α appartenant à $]0,\varepsilon[$ tels que :

$$\forall x \in\ ]a-\alpha,a+\alpha[\,,\ f(x)=g(x)h(x)$$

  De plus, comme h tend vers 1 en a, il existe un réel α' tel que :

$$\forall x \in\ ]a-\alpha',a+\alpha'[\,,\ h(x)>0$$

  Dès lors, en notant $\alpha''=\max(\alpha,\alpha')$, on a :

$$\forall x \in\ ]a-\alpha'',a+\alpha''[\,,\ f(x)=g(x)h(x) \quad \text{et} \quad h(x)>0$$

  donc f et g sont de même signe sur $]a-\alpha'',a+\alpha''[$.

Correction de l'exercice 21-3

1. D'après 18.45, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}\,,\ 0<|\sin(x)|\leqslant|x|\leqslant|\tan(x)|$$

   d'où :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}\,,\ 1\leqslant\left|\frac{x}{\sin(x)}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\cos(x)}\right|$$

   soit encore, comme les fonctions $x\mapsto\dfrac{x}{\sin(x)}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ sont strictement positives sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$:

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}\,,\ 1\leqslant\frac{x}{\sin(x)}\leqslant\frac{1}{\cos(x)}$$

   De plus, comme $\cos(0)=1$ et comme la fonction cos est continue en 0, on a :

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(x)}=1$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

donc finalement :

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

2. D'après 18.43, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left[1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

De plus, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$$

donc :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

et donc, d'après 21.13 :

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} 2 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

et finalement :

$$1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

3. On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

De plus, on a :

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

et, comme $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$ et d'après 21.10 :

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$$

et finalement, d'après 21.13 :

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Correction de l'exercice 21-4

Soit n un entier naturel, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Démontrons par récurrence que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la proposition $\mathscr{H}(p)$: « $f \times g$ est p fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} \times g^{(p-k)} \text{ »}$$

est vraie.

◇ Pour $p = 0$. Par convention, $(f \times g)^{(0)} = f \times g$ donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

◇ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$ (si $n \geqslant 1$). On suppose que $\mathscr{H}(p)$ est vraie. Comme f et g sont n fois dérivables sur I, les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(p-k)}$ sont dérivables sur I pour tout k appartenant à $[\![0, p]\!]$, donc $(f \times g)^{(p)}$ est dérivable sur I. Par conséquent, $f \times g$ est $p+1$ fois dérivable sur I et on a :

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(p+1)} &= ((f \times g)^{(p)})' \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left[f^{(k+1)} \times g^{(p-k)} + f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k+1)} \times g^{(p-k)} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right] f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} + g^{(p+1)} - \binom{p}{p+1} f^{(p+1)} \times g^{(0)}
\end{aligned}$$

et, d'après la formule de Pascal et en remarquant que $\displaystyle\binom{p}{p+1} = 0$:

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(p+1)} &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} \times g^{(p+1-k)} + g^{(p+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} \times g^{(p+1-k)}
\end{aligned}$$

donc finalement : $\mathscr{H}(p) \Rightarrow \mathscr{H}(p+1)$.

◇ Ainsi, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, ce qui nous permet de conclure en particulier :

$f \times g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.}$$

Correction de l'exercice 21-5

1. (a) Soit $t \in]a, b[$. Il existe alors un réel λ appartenant à $]0, 1[$ tel que :

$$t = \lambda a + (1-\lambda)\, b$$

et alors, comme f est convexe sur I et comme a et b appartiennent à I :

$$f(t) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)\, f(b)$$

d'où, en remarquant que $f(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)\, f(t)$:

$$\lambda \left[f(t) - f(a) \right] \leqslant (1-\lambda) \left[f(b) - f(t) \right] \tag{21.2}$$

De plus, on a :

$$t = \lambda a + (1-\lambda)\, b \Longleftrightarrow \lambda\,(a-b) = t - b$$

et comme $a - b \neq 0$:

$$\lambda = \frac{b-t}{b-a} \quad \text{et} \quad 1 - \lambda = \frac{t-a}{b-a}$$

d'où, d'après (21.2) :

$$\frac{b-t}{b-a} \left[f(t) - f(a) \right] \leqslant \frac{t-a}{b-a} \left[f(b) - f(t) \right]$$

Enfin, on peut remarquer que, comme $a < t < b$, on a :

$$b - t > 0, \quad b - a > 0 \quad \text{et} \quad t - a > 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall t \in \left]a, b\right[,\ \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leqslant \frac{f(t) - f(b)}{t - b}}$$

(b) Comme f est dérivable sur I, elle est dérivable en a et en b, donc, on obtient, en faisant tendre t vers a :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

et en faisant tendre t vers b :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b)$$

d'où :

$$f'(a) \leqslant f'(b)$$

ce qui nous permet de conclure, ce résultat étant valable pour tout couple (a, b) d'éléments de I tel que $a < b$:

$$\boxed{f' \text{ est croissante sur } I}$$

2. Soit $x_0 \in I$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$ est dérivable sur I comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

Comme f' est croissante sur I, on en déduit que :

$$\forall x \in I,\ \begin{cases} x \leqslant x_0 \Rightarrow g'(x) \leqslant 0 \\ x \geqslant x_0 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Par conséquent, g est décroissante sur $I \cap \left]-\infty, x_0\right]$ et croissante sur $I \cap \left[x_0, +\infty\right[$, donc admet un minimum global en x_0 sur I. Comme $g(x_0) = 0$, on en déduit que :

$$\forall x \in I,\ g(x) \geqslant 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$$

3. (a) Comme a et b appartiennent à I, c appartient à $\left]a, b\right[$ donc, comme I est un intervalle, à I. D'après (21.1), on a donc :

$$f(a) \geqslant f'(c)\,(a - c) + f(c) \quad \text{et} \quad f(b) \geqslant f'(c)\,(b - c) + f(c)$$

d'où :

$$f(a) - f(c) \geqslant f'(c)\,(a - c) \quad \text{et} \quad f(b) - f(c) \geqslant f'(c)\,(b - c)$$

et donc, comme $a - c < 0$ et $b - c > 0$:

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant f'(c) \quad \text{et} \quad \frac{f(ba) - f(c)}{b - c} \geqslant f'(c)$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant f'(c) \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}}$$

(b) ► On a :

$$c = \lambda a + (1 - \lambda)\,b \Longleftrightarrow \lambda\,(a - b) = c - b$$

et donc, comme $c - b \neq 0$:

$$\boxed{\lambda = \frac{c - b - b}{a - b} = \frac{b - c}{b - a}}$$

► Par définition de λ, on a :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)\,b) = f(c)$$

De plus, d'après le résultat de la question 3a, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} &\Rightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \\ &\Rightarrow (b-c)\,[f(c)-f(a)] \leqslant (c-a)\,[f(b)-f(c)] \\ &\Rightarrow (b-a)\,f(c) \leqslant (b-c)\,f(a) + (c-a)\,f(b)\end{aligned}$$

et donc, comme $b-a>0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} &\Rightarrow f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}\,f(a) + \frac{c-a}{b-a}\,f(b) \\ &\Rightarrow f(c) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)\,f(b)\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{f(\lambda a + (1-\lambda)\,b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)}$$

Remarque Finalement, on a démontré, avec les notations du théorème 21.22, les implications :

$$i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow i$$

ce qui prouve que les trois assertions sont équivalentes.

Sommaire