20 Fonctions réelles d'une variable réelle : calcul différentiel

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

A. Calcul différentiel

Dans toute cette partie et sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et a un élément de I. Toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur un voisinage de a.

A.1. Fonctions dérivables en un point, sur un intervalle

Définition 20.1

Soit f une fonction définie sur I.

i. Si $a \in \overset{\circ}{I}$, on dit que f est **dérivable** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé** de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ii. On dit que f est **dérivable à droite** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(a)$ et appelée **nombre dérivé à droite** de f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

iii. On dit que f est **dérivable à gauche** en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche en a ; dans ce cas, cette limite est notée $f'_g(a)$ et appelée **nombre dérivé à gauche** de f en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

iv. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I (à droite uniquement si a est la borne inférieure de I, à gauche uniquement si a est la borne supérieure de I) ; dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f.

Exercice 20.1

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto ax+b$.
2. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto |x|$.
3. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarques

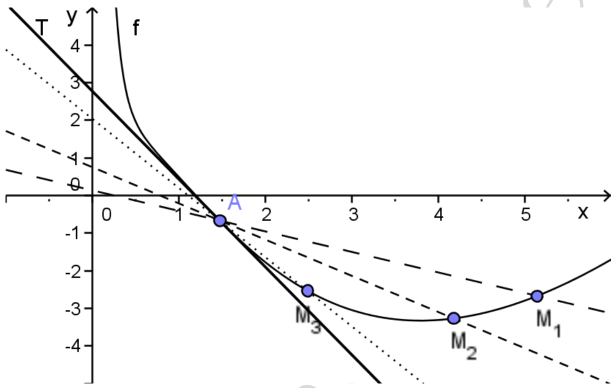
a. On remarque que, si a n'est pas une borne de I, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et si : $f'_d(a) = f'_g(a)$.

b. Si f' est définie et dérivable sur I, sa dérivée est notée f'' ou $f^{(2)}$ et appelée **dérivée seconde** de f.

c. Si f'' est dérivable sur I, sa dérivée est notée $f^{(3)}$.

d. Graphiquement, on rappelle que, si $x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$.

On peut voir sur le graphique ci-dessous que, quand x tend vers a, le point M se rapproche de A et que la droite (AM) se rapproche d'une droite T qui passe par A et qui, au voisinage de A, est très proche de la courbe. Le coefficient directeur de cette droite T est la limite du coefficient directeur de la droite (AM) quand x tend vers a si f est dérivable en a et T a pour équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.



Cette remarque nous conduit à la définition suivante :

Définition 20.2

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

i. Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ est appelé **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

ii. Si $a \in \overset{\circ}{I}$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, on dit qure la droite d'équation $x = f(a)$ est une **tangente verticale** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

iii. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, on dit qure la droite d'équation $x = f(a)$ est une **demi-tangente verticale** (à gauche ou à droite) à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

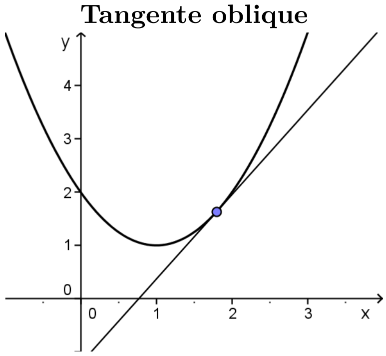
Remarque Si f est dérivable en a et si T_a est la tangente à la courbe représentative de f dans un repère, alors :

a. on dit que T_a est une **tangente horizontale** si $f'(a) = 0$,

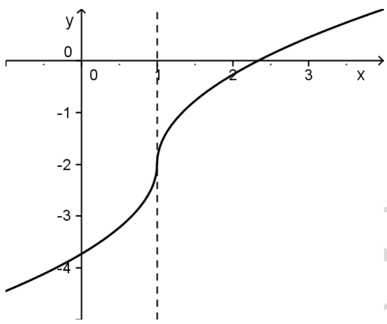
b. on dit que T_a est une **tangente oblique** si $f'(a) \neq 0$,

c. si $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à gauche et à droite en a et si celles-ci ne sont pas égales, on dit que la courbe représentative de f n'afmet pas de tangente au point d'abscisse a : ce point est appelé **point anguleux**.

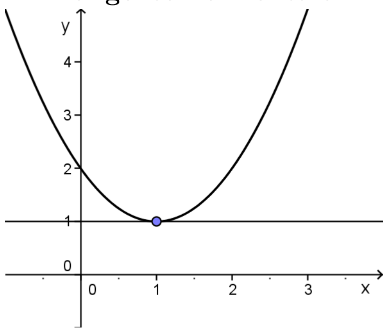
Tangente oblique



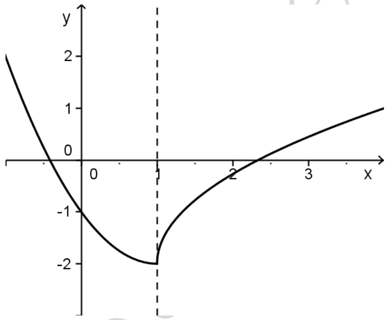
Tangente verticale



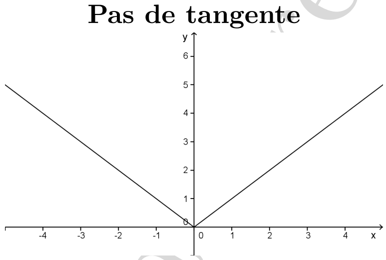
Tangente horizontale



Demi-tangente verticale



Pas de tangente



Le point $O(0,0)$ est un point anguleux

Proposition 20.3

Si f est une fonction dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a.

Preuve Soit a un élément de I. On suppose que f est dérivable en a et on pose :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad g(a) = f'(a)$$

Comme f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

De plus, on peut remarquer que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ f(x) = f(a) + (x - a)\, g(x)$$

et donc, comme $x \mapsto x - a$ et g sont continues en a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui prouve bien que f est continue en a.

□

Remarque Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, on a vu dans l'exercice 17.1 que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en a, alors qu'elle est continue en 0.

Théorème 20.4

Soit f et g des fonctions dérivables sur I et h une fonction dérivable sur un intervalle J.

i. Pour tout réel λ, λf est dérivable sur I et :

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

ii. $f+g$ est dérivable sur I et :

$$(f+g)' = f' + g'$$

iii. $f \times g$ est dérivable sur I et :

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

iv. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

v. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

vi. Si f est dérivable sur I et prend ses valeurs dans J et si h est dérivable sur J, alors $h \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$$

Remarque Tous ces résultats sont encore valable pour des fonctions dérivables uniquement en un point a de I (c'est d'ailleurs ce qui est prouvé ci-après) mais sont présentés ainsi pour simplifier la lisibilité.

Remarques

a. Les points i et ii permettent de dire, en remarquant que la fonction constante nulle est dérivable sur I, que l'ensemble $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire sur $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{R})$.

b. Attention à éviter des phrases toutes faites du type « $h \circ f$ est dérivable sur I comme composée de fonctions qui le sont » : en effet, la fonction h n'est pas nécessairement dérivable sur I.

Proposition 20.5

Les fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques (cos, sin et tan) sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20.2 On se propose de démontrer la proposition 20.5.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En factorisant la fonction polynôme $x \mapsto x^n - a^n$, démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en a.

   (b) En déduire que les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.

2. En utilisant les formules de trigonométries usuelles, démontrer que les fonctions trigonométriques sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.

3. Démontrer que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

Remarque En utilisant la preuve précédente et 20.4, on a en particulier démontré les résultats suivants :

Proposition 20.6

Dans le tableau suivant, f est une fonction dérivable en tout point d'une D de $\mathbb{R}$, f' désigne la dérivée de f sur D, n est un entier relatif et c une constante réelle.

f	f'	D	f	f'	D
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\tan$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$			
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$			

A.2. Extremums d'une fonction dérivable

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Théorème 20.7

Si f est une fonction définie et dérivable sur $]a, b[$ et si f admet un extremum local en $c \in]a, b[$, alors : $f'(c) = 0$.

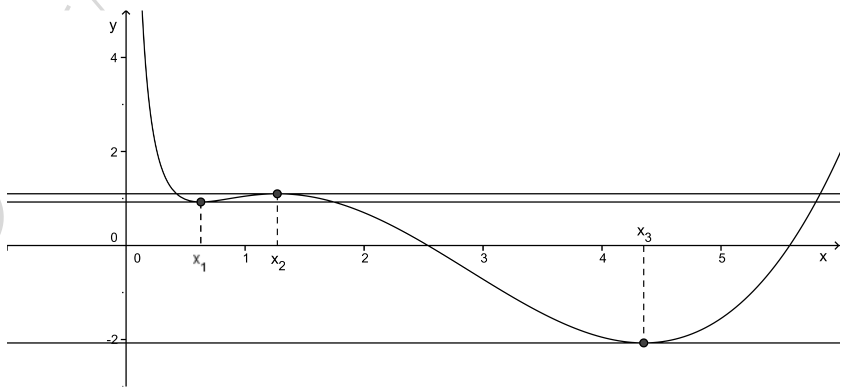
Exercice 20.3 En considérant le signe de $f'(c)$, démontrer le théorème 20.7.

Remarques

a. Ainsi, si une fonction dérivable sur un intervalle I admet un extremum local en un point a **intérieur** à I (donc pas aux bornes de I), alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en a. Par exemple, le graphe ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et admettant un minimum local en x_1, un maximum local en x_2 et un minimum local en x_3.

b. Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0, mais elle n'admet pas d'extremum local en 0 puisque la fonction $x \mapsto x^3$ change de signe sur tout intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$.

c. Attention également au fait que ce résultat n'est valable que sur un intervalle ouvert. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ admet un maximum sur $[0, 1]$ (qui est 1), mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[0, 1]$.



A.3. Théorème de Rolle

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Théorème 20.8 ▶ Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un maximum M et un minimum m d'après 19.34, respectivement atteints en deux éléments c_1 et c_2 de $[a, b]$. Comme $f(a) = f(b)$, deux cas se présentent alors :

- si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$, donc sa dérivée est constante nulle,
- si $m \neq M$, alors l'un au moins des réels c_1 et c_2 (que l'on note alors c) appartient à $]a, b[$ et alors, comme f est dérivable sur $]a, b[$ et d'après 20.7, $f'(c) = 0$.

□

Remarque Il n'y a pas nécessairement unicité de ce réel c.

A.4. Accroissements finis

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Théorème 20.9 ▶ des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve On suppose que f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et on considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Comme les fonctions f et $x \mapsto x - a$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, g est dérivable sur $]a, b[$ et on a :

$$\forall x \in]a, b[\,,\ g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De plus, on a :

$$g(a) = g(b) = f(a)$$

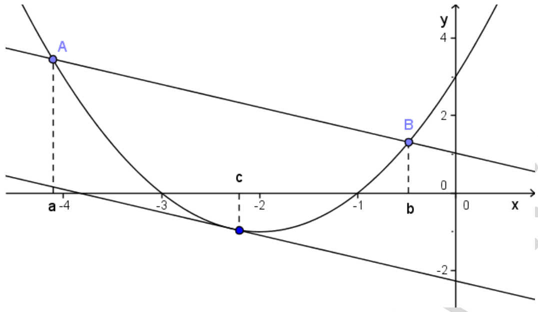
On peut donc affirmer, d'après le théorème de Rolle, qu'il existe un réel c tel que $g'(c) = 0$, donc tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Remarques **a.** Rappelons que, en notant A et B les points de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

Le théorème des accroissements finis prouve donc que, si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe une tangente à la courbe représentative de f en un point d'abscisse c comprise entre a et b qui est parallèle à la droite (AB).



b. On en déduit de manière immédiate le résultat suivant :

Théorème 20.10 ▶ Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

i. Si : $\forall x \in]a,b[\,,\ m \leqslant f'(x)$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ii. Si : $\forall x \in]a,b[\,,\ f'(x) \leqslant M$, alors : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

iii. Si : $\forall x \in]a,b[\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

iv. Si : $\forall x \in]a,b[\,,\ |f'(x)| \leqslant M$, alors : $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$.

Remarque Un des intérêts fondamentaux de ce résultat est qu'il permet de déterminer les variations d'une fonction dérivable à partir du signe de sa dérivée, comme on le résume au paragraphe suivant :

A.5. Sens de variations d'une fonction dérivable

Théorème 20.11

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

i. f est constante sur I si et seulement si f' est constante nulle sur $\overset{\circ}{I}$,

ii. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur $\overset{\circ}{I}$,

iii. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Exercice 20.4 Démontrer le théorème 20.11. On pourra utiliser les inégalités des accroissements finis 20.10.

Remarque Attention : pour appliquer ce théorème, il est fondamental que I soit un intervalle et que f soit continue sur I.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative ou nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque, par exemple : $-2 < 3$ et $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{3}$.

En revanche, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ étant des intervalles, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur chacun de ces intervalles.

Théorème 20.12

Si f est une fonction monotone sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement monotone sur I si et seulement si l'ensemble des points en lesquels f' s'annule est fini ou dénombrable.

A.6. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 20.13

Soit f une continue définie sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est continue et dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Proposition 20.14

Les fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques (cos, sin et tan) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs domaines de définition respectifs.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 20.15 ▶ Théorème de prolongement de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et a un élément de I. On suppose que :

- f est continue sur I,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
- f' a une limite finie en a.

Dans ce cas, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

Exercice 20.5 Démontrer le théorème 20.15. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

A.7. Dérivabilité de la réciproque d'une fonction dérivable

Théorème 20.16

Si f est une fonction bijective de I sur J, si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Preuve On a :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

De plus, comme f est bijective de I sur J et comme $f(x_0) = y_0$, on a :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ f^{-1}(y) - x_0 \neq 0$$

et donc :

$$\forall y \in J \setminus \{y_0\},\ \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}$$

Par ailleurs, comme f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0, donc f^{-1} est continue en y_0 et :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Enfin, comme f est dérivable e, x_0, on a :

$$\lim_{z \to x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = f'(x_0)$$

et donc, par composition :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f\big(f^{-1}(y)\big) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = f'(x_0)$$

et finalement, comme $f'(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

□

B. Les fonctions arctan, logarithmes, exponentielle et puissances

B.1. La fonction arctan

Théorème 20.17

La fonction tan induit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Sa réciproque est appelée **fonction arctangente** et notée arctan ; c'est une fonction continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 20.6 Démontrer le théorème 20.17.

Proposition 20.18

On a :

$$\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Preuve Comme $\arctan(0) = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$$

et donc, comme la fonction arctan est dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \arctan'(0) = 1$$

ce qui prouve que : $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$. □

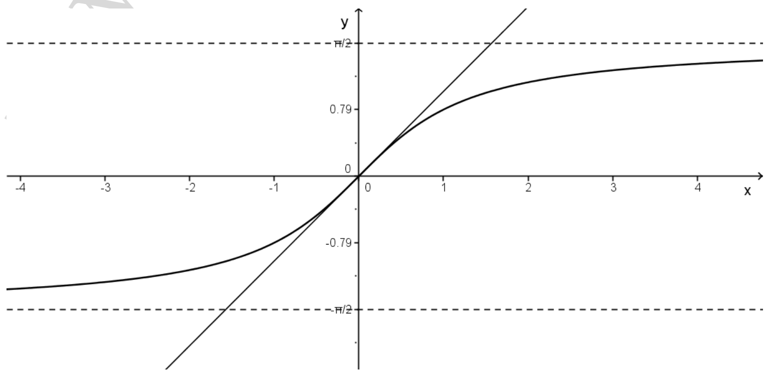


FIGURE 20.1 – Représentation graphique de la fonction arctan

B.2. Les fonctions logarithmes

Théorème 20.19

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Cette fonction est appelée **logarithme népérien** et notée ln.

Remarque La démonstration de ce théorème faisant appel à des résultats démontrés dans le chapitre 21 elle fera l'objet d'un exemple dans ce chapitre.

Définition 20.20

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, on appelle **logarithme en base *a*** la fonction notée $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Si $a = 10$, la fonction logarithme en base 10 (ou logarithme décimal) est plus simplement notée log.

Proposition 20.21

Les fonctions logarithmes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve Par définition, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il en découle de manière immédiate que toutes les fonctions logarithmes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. □

Remarque Les deux résultats suivants découlent de manière immédiate de la définition de la fonction ln et des propriétés de la dérivée d'une fonction composée :

Théorème 20.22

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Théorème 20.23

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

Théorème 20.24

La fonction ln a les propriétés suivantes :

i. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

ii. $\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

iii. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

iv. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

v. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$

Exercice 20.7
1. En considérant la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$, démontrer le point i du théorème 20.24.
2. Démontrer les points ii à v du théorème 20.24.

Théorème 20.25

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Exercice 20.8 On se propose de prouver le théorème 20.25.
1. Quelle est la limite de la suite $(\ln(2^n))_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Justifier que la fonction ln admet une limite ℓ, finie ou infinie, en $+\infty$.
3. Conclure.

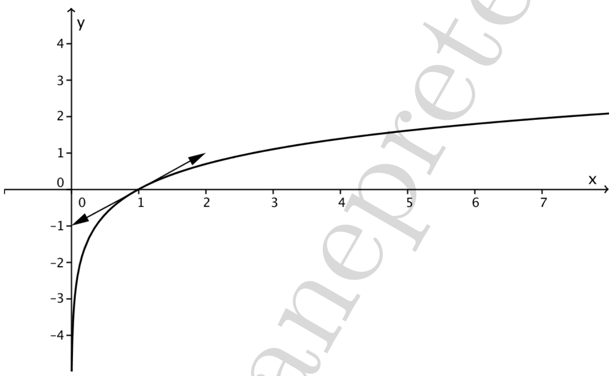


Figure 20.2 – Graphe de la fonction ln

Remarque Le lecteur pourra démontrer que la courbe représentative de ln admet pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation $y = x - 1$.

Graphiquement, on voit que la courbe est « en dessous » de cette tangente et plus généralement de toutes ses tangentes : on dit que la fonction ln est **concave**. On peut le démontrer, par exemple, en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(x) - x + 1$ pour démontrer que celle-ci est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$$

Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il faut le connaitre car il est très souvent utile, et surtout savoir le démontrer.

Théorème 20.26

On a :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

Preuve On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$$

et donc, comme la fonction ln est dérivable en 1 :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$$

ce qui prouve que :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

Le second équivalent se déduit de manière immédiate par changement de variable $x = 1+u$. □

B.3. La fonction exponentielle

Théorème 20.27

La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et elle est notée exp.

Preuve On a déjà vu que ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

ce qui suffit pour affirmer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 20.28

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$$

Exercice 20.9 Démontrer la proposition 20.28.

Remarque On déduit de la définition, du résultat précédent et de 20.4 le résultat suivant :

Proposition 20.29

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u$$

Proposition 20.30

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 20.31

i. $\exp(0) = 1$

ii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

iii. $\forall b \in \mathbb{R},\ \exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$

iv. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

v. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(a_i)$

vi. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (\exp(a))^n = \exp(na)$

Preuve

1. Comme exp est la réciproque de la fonction ln, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\ln(x)) = x$$

et donc en particulier :

$$\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme la fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il existe un unique couple (u, v) de réels strictement positifs tels que :

$$a = \ln(u) \quad \text{et} \quad b = \ln(v)$$

et alors :

$$u = \exp(a) \quad \text{et} \quad v = \exp(b)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \exp(\ln(u) + \ln(v)) \\ &= \exp(\ln(uv)) \\ &= uv \\ &= \exp(a) \times \exp(b) \end{aligned}$$

Les points suivant s'en déduisent en procédant comme dans l'exercice 17.8.

□

Remarque On peut constater que la fonction exponentielle a des propriétés analogues à celles des opérations sur les puissances. Cela nous conduit aux notations suivantes :

Notation 20.32

On note :

$$\mathrm{e} = \exp(1) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$$

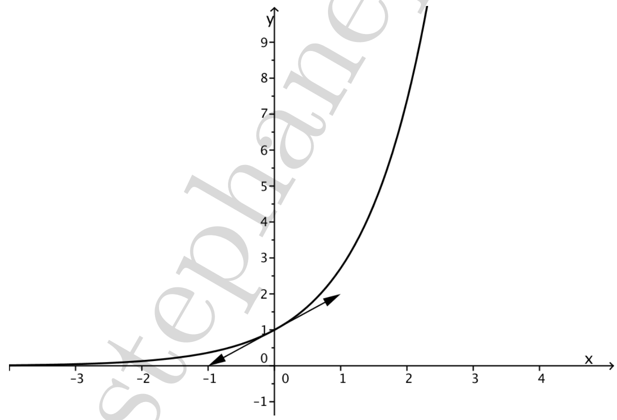


FIGURE 20.3 – Graphe de la fonction exp

Remarque Le lecteur pourra démontrer que la courbe représentative de exp admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$.

Graphiquement, on voit que la courbe est « au dessus » de cette tangente et plus généralement de toutes ses tangentes : on dit que la fonction exp est **convexe**. On peut le démontrer, par exemple, en étudiant la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ pour démontrer que celle-ci est positive sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

Ce résultat ne fait pas partie du cours, mais il faut le connaitre car il est très souvent utile, et surtout savoir le démontrer.

Théorème 20.33

On a :

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Preuve On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$$

et donc, comme la fonction exp est dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

ce qui prouve que :

$$\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$$

□

Théorème 20.34

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Preuve

- La fonction exponentielle est monotone sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ en $+\infty$, finie ou infinie. De plus, on a :

  $$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

  donc par convention :

  $$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\ln(x)} = \ell$$

  Or on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

  d'où :

  $$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

- On a :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$$

  De plus on a :

  $$\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty, \quad \lim_{u \to +\infty} \mathrm{e}^u = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

  d'où :

  $$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

□

Définition 20.35

Pour tout réel a strictement positif, on appelle **fonction exponentielle en base a** la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$$

Compte tenu des propriétés de la fonction exponentielle, on note aussi plus simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = \exp(x \ln(a)) = a^x$$

Remarques

a. La fonction exponentielle est donc également la fonction exponentielle en base e.

b. Comme $\ln(\exp(1)) = 1$, la fonction ln est aussi le logarithme en base e.

B.4. Les fonctions puissances

Définition 20.36

Pour tout réel a, on appelle **fonction puissance d'exposant a** la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = x^a = \exp(a\ln(x))$$

Remarques

a. D'après les propriétés de la fonction ln, on a donc :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (x^n)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x^n)\right)\\ &= \exp(\ln(x))\\ &= x.\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp(\ln(x))\\ &= x.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est égale sur $\mathbb{R}_+^*$ à la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (racine $n^{ème}$)

b. Les résultats suivants découlent de manière immédiate des propriétés des fonctions exp et ln :

Proposition 20.37

Pour tout réel b, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(a^b) = b\ln(a)$$

Proposition 20.38

Pour tout réel a, la fonction $f_a : x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln(x)) = ax^{a-1}$$

Théorème 20.39

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

1. si $a > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$
2. si $a < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$

Remarque Si $a > 0$, on prolonge donc naturellement la fonction $f_a : x \mapsto x^a$ par continuité en 0 en posant : $f_a(0) = 0$.

Théorème 20.40

On a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Preuve

Si $\alpha = 0$, l'équivalence est évidente puisqu'il y a égalité. Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Comme la fonction $x \mapsto 1+x$ est dérivable et strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et comme la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est

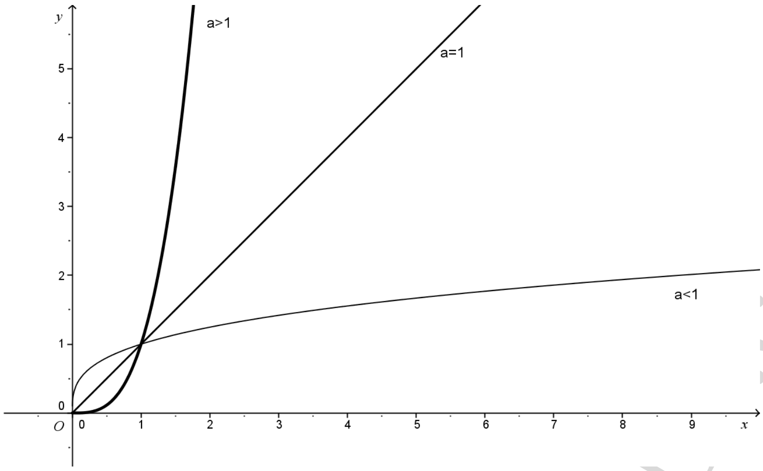


FIGURE 20.4 – Graphe de la fonction $x \mapsto x^a$

dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $g : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\ g'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$$

De plus, on a :

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\ \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \times g'(0) = 1$$

ce qui prouve que :

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

□

C. Comparaison des fonctions de référence : « croissances comparées »

Dans un grand nombre de calculs de limites, on se retrouve avec des opérations donnant lieu à des formes indéterminées du type « $\infty - \infty$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». Dans un tel cas, il est intéressant de savoir quelle fonction est éventuellement prépondérante. On a déjà vu dans le chapitre 16 comment comparer entre elles les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles. Mais qu'en est-il des fonctions exp, ln et $x \mapsto x^a$ (avec $a > 0$) introduites ci-avant et qui sont toutes croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$?
L'objet de ce paragraphe est de comparer ces fonctions en déterminant, pour chaque comparaison possible, quelle fonction « croit le plus vite » pour aider, dans les calculs de limites, à identifier la fonction prépondérante.

C.1. Comparaison des fonctions puissances

Théorème 20.41

Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} x^a \underset{x\to+\infty}{=} \circ(x^b) \\ \\ x^b \underset{x\to 0^+}{=} \circ(x^a) \end{cases}$$

Preuve

On suppose que : $0 < a < b$. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad \text{et} \quad \frac{x^b}{x^a} = x^{b-a}.$$

Comme $a-b<0$ et $b-a>0$, on a donc, d'après 20.39 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{x^b} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{x^b}\frac{x^b}{x^a} = 0.$$

□

C.2. Comparaison des fonctions puissances et ln

Théorème 20.42

Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

Autrement dit :

$$(\ln(x))^b \underset{x\to+\infty}{=} \circ(x^a)$$

Exercice 20.10 On se propose de démontrer le théorème 20.42.

1. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x$$

   (b) En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

2. Déduire du résultat précédent que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

   puis que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

Exercice 20.11 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^2 - \sqrt{x} - \ln(x)$.

Théorème 20.43

Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0$$

Autrement dit :

$$|\ln(x)|^b \underset{x\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^a}\right)$$

Remarques

a. Ce résultat est se déduit immédiatement de 20.42 en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$.

b. On retiendra donc qu'en 0 ou en $+\infty$, la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction ln lorsqu'il y a une forme indéterminée.

c. Les deux résultats précédents restent valables si b est négatif ou nul. Mais il ne s'agit pas alors de croissances comparées puisqu'il n'y a pas d'indétermination dans ce cas.

d. Attention à ne pas abuser de l'expression « par croissances comparées » et bien penser à vérifier qu'il s'agit bien de comparaison de croissances.

C.3. Comparaison des fonctions puissances et exponentielle

Théorème 20.44

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^{x^b}} = 0$$

Autrement dit :

$$x^a \underset{x \to +\infty}{=} \circ\left(\mathrm{e}^{x^b}\right)$$

Preuve On peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x^a}{\mathrm{e}^{x^b}} = \frac{(\ln(\mathrm{e}^{x^b})^{b/a}}{\mathrm{e}^{x^b}}$$

De plus, d'après 20.42 et comme $\frac{a}{b}$ est strictement positif, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln(t))^{a/b}}{t} = 0$$

Enfin on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x^b} = +\infty$$

donc, par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(\mathrm{e}^{x^b})^{b/a}}{\mathrm{e}^{x^b}} = 0$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Remarques

a. On retiendra qu'au voisinage de $+\infty$, les fonctions exponentielles sont prépondérantes sur les fonctions puissances

b. Avec 20.42, on en déduit de manière immédiate le résultat suivant.

C.4. Comparaison des fonctions ln et exponentielle

Théorème 20.45

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{\mathrm{e}^{x^b}} = 0$$

Autrement dit :

$$(\ln(x))^a \underset{x \to +\infty}{=} \circ\left(\mathrm{e}^{x^b}\right)$$

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 20-1

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{f : x \mapsto ax+b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a}$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On distingue les cas selon le signe de x_0.

► Si $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0, 2x_0[\,,\ \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} &= \frac{x-x_0}{x-x_0} \\ &= 1\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = 1$$

ce qui prouve que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

► Si $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in]2x_0, 0[\,,\ \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} &= \frac{(-x)-(-x_0)}{x-x_0} \\ &= -1\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = -1$$

ce qui prouve que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_-^*$.

► Si $x_0 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} &= \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{(-x)-(-x_0)}{x-x_0} & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = -1$$

donc la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais, les nombres dérivées à gauche et à droite étant différents, elle n'est pas dérivable en 0.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto |x| \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et } \mathbb{R}_+^*, \text{ mais pas en } 0}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} \\ &= x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right| \leqslant |x|$$

De plus, on a :

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{h \text{ est dérivable en } 0 \text{ et : } h'(0) = 0}$$

Correction de l'exercice 20-2

1. (a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$$

et donc, la fonction polynôme $x :\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ étant continue en a :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto x^n \text{ est dérivable en } a \text{ et : } f'(a) = na^{n-1}}$$

(b) ► Soit P une fonction polynôme. Il existe donc un entier naturel m et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_k x^k$$

donc d'après 20.4 la question précédente P est la somme de fonctions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{\text{Les fonctions polynômes sont dérivables sur } \mathbb{R}}$$

► Soit R une fonction rationnelle. Il existe deux fonctions polynômes P et Q telles que, en notant E l'ensemble des racines de Q, le domaine de définition de R soit $D_R = \mathbb{R} \setminus E$ et :

$$\forall x \in D_R,\ R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Comme P et Q sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat précédent, R est donc dérivable en tout point x_0 tel que $Q(x_0) \neq 0$, donc en tout point de F, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition}}$$

2. ► Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après les formules de trigonométrie usuelles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\},\ \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}$$

De plus, on sait que :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

donc :

$$\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{x-x_0}{2}$$

et donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = 1$$

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x+x_0}{2} = x_0$$

et donc, la fonction cos étant continue en x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos(x_0)$$

d'où :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \cos(x_0),$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La fonction sin est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)}$$

- D'après les formules de trigonométrie usuelles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat précédent donc, d'après 20.4, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

et finalement, d'après les formules de trigonométrie usuelles :

$$\boxed{\text{La fonction cos est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)}$$

- La fonction tan : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est donc le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan'(x) &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x) \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction tan est dérivable sur } D = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et :} \\ \forall x \in D,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}\end{array}}$$

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+ \ /\ t \neq t_0,\ \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t_0}}{t-t_0} &= \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t_0}}{\left(\sqrt{t}-\sqrt{t_0}\right)\left(\sqrt{t}+\sqrt{t_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t_0}}\end{aligned}$$

De plus, comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue en t_0, on a :

$$\lim_{t\to t_0} \left(\sqrt{t}+\sqrt{t_0}\right) = 2\sqrt{t_0}$$

et donc :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{t - t_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t_0}} & \text{si } t_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t_0 = 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure :

La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Correction de l'exercice 20-3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]a, b[$, admettant un extremum local en c appartenant à $]a, b[$. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ soit inclus dans $]a, b[$ tel tel que $f(c)$ soit un extremum global de f sur cet intervalle. On pose alors :

$$a' = c - \varepsilon \quad \text{et} \quad b' = c + \varepsilon$$

et on suppose que $f(c)$ est le maximum de f sur $]a', b'[$ (le cas d'un minimum se traite de manière analogue. On a alors :

$$\forall x \in]a', b'[,\ f(x) \leqslant f(c)$$

et donc :

$$\forall x \in]a', c[,\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]c, b'[,\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

et donc, en faisant tendre x vers c à gauche et à droite, et comme f est dérivable en c :

$$f'(c) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(c) \leqslant 0$$

ce qui prouve que : $f'(c) = 0$.

Correction de l'exercice 20-4

On démontre le point *iii.* Les points *i* et *ii* se démontrent de manière analogue.

- On suppose que f est décroissante sur I. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Comme f est décroissante sur I, $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont de signes contraires pour tout x appartenant à I, donc :

  $$\forall x \in I \ /\ x \neq x_0,\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

  et donc, en faisant tendre x vers x_0 et comme f est dérivable en x_0 :

  $$f'(x_0) \leqslant 0$$

  donc f' est négative sur $\overset{\circ}{I}$.

- On suppose que f' est négative sur $\overset{\circ}{I}$, c'est-à-dire que :

  $$\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leqslant 0$$

  Comme f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, on a alors, d'après les inégalités des accroissements finis :

  $$\forall (a, b) \in I \ /\ a < b,\ f(b) - f(a) \leqslant 0 \times (b - a)$$

  et donc :

  $$\forall (a, b) \in I \ /\ a < b,\ f(b) - f(a)$$

  donc f est décroissante sur I.

Finalement, f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Correction de l'exercice 20-5

Pour simplifier, on suppose que $I = [a, b]$ où b est un réel tel que $a < b$ (le raisonnement est analogue si I est de la forme $[b, a]$ avec $b < a$ ou si a est un point intérieur à I). f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$ donc on a, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\forall x \in \,]a, b]\,,\ \exists\, c(x) \in \,]a, x[\ \ /\ \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x))$$

On peut ainsi définir une fonction c en choisissant, pour chaque réel x appartenant à $]a, b]$, une valeur de $c(x)$ satisfaisant l'égalité précédente et alors, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{x \to a} c(x) = a$$

et, comme $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

ce qui, comme ℓ appartient à $\mathbb{R}$, prouve que f est dérivable en a et que : $f'(a) = \ell$. En particulier, on a aussi :

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \ell = f'(a)$$

donc f' est continue en a. Finalement, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$, on en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Correction de l'exercice 20-6

► La fonction tan est une fonction dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et telle que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$
$$> 0$$

donc tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$. De plus, on sait que :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ >}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} = +\infty$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{tan induit une bijection de } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } \mathbb{R}}$$

► Comme tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut affirmer que :

$$\boxed{\text{arctan est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

► Comme tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme sa dérivée ne s'annule pas, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x))^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\boxed{\text{arctan est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \tfrac{1}{1+x^2}}$$

Correction de l'exercice 20-7

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $x \mapsto \ln(ax)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(x) - \ln(a)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il en découle que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

$$f(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 0$$

et en particulier on adonc :

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

2. ► En prenant $a = \dfrac{1}{b}$ dans le résultat précédent, on obtient :

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b)$$

et donc, comme $\ln(1) = 0$:

$$\boxed{\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)}$$

► D'après les deux points précédents, on a :

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

► Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathscr{H}(n) :\ « \ \forall (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) \ »$$

est vraie.

◇ Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{H}(n)$ soit vraie. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$. On a :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1}\right)$$

donc, d'après le point i :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) + \ln(a_{n+1}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) + \ln(a_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \ln(a_i)\end{aligned}$$

donc : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)}$$

► Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On distingue les cas selon le signe de n.

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, d'après le résultat prédédent :

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln(a)\\ &= n\ln(a)\end{aligned}$$

◇ Si $n = 0$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(a^0) &= \ln(1)\\ &= 0\\ &= 0\ln(a)\end{aligned}$$

◇ Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)\\ &= -\ln\big(a^{-n}\big)\end{aligned}$$

et comme $-n$ appartient à $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= -(-n)\ln(a)\\ &= n\ln(a).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(a^n) = n\ln(a)}$$

Correction de l'exercice 20-8

1. D'après 20.24, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2^n) = n\ln(2).$$

Comme $\ln(2) > 0$, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty}$$

2. Comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{La fonction ln admet une limite } \ell, \text{ finie ou infinie, en } +\infty}$$

3. ► On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

donc par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \ell$$

ce qui nous permet de conclure, d'après la question 1 :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$$

► On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

De plus, on a :

$$\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to0+} \ln(x) = -\infty}$$

Correction de l'exercice 20-9

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée, la fonction inverse, ne s'annule pas sur cet intervalle, donc la fonction exponentielle (réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) &= (\ln^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{\ln'(\exp(x))}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}\\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\exp^{(n)} = \exp$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La fonction exponentielle est de classe } \mathcal{C}\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ \exp(n) = \exp}$$

Correction de l'exercice 20-10

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) &= \frac{1}{x} - 1\\ &= \frac{1-x}{x}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [1,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0$$

Ainsi f est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc $f(1) = -1$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant -1 \leqslant 0$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x}$$

(b) D'après le résultat précédent et comme la fonction ln est positive sur $[1,+\infty[$, on a :

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ 0 \leqslant \ln(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$$

et donc, d'après les propriétés de la fonction ln :

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{2} \leqslant \sqrt{x}$$

d'où :

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

2. ► Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$$

donc, d'après le résultat précédent et par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^a)}{x^a} = 0$$

soit encore :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a\ln(x)}{x^a} = 0$$

et finalement, comme $a \neq 0$:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0}$$

► Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$\lim_{t\to 0} t^b = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{b/a}} = 0$$

donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{b/a}}\right)^b = 0$$

d'où :

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0}$$

Correction de l'exercice 20-11

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 - \sqrt{x} - \ln(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or on a, d'après les limites usuelles et les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1,$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \sqrt{x} - \ln(x)\right) = +\infty}$$

E. Pour aller plus loin

Preuve de la proposition 20.4

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in I$. On a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et donc, comme f est dérivable en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda f'(a)$$

donc (λf) est dérivable en a et : $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

2. Soit $a \in I$. On a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

et donc, comme f et g sont dérivables en a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

ce qui prouve que $f+g$ est dérivable en a et que : $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

3. Soit $a \in I$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in I \setminus \{a\},\ \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{[f(x) - f(a) + f(a)]\, g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{[f(x) - f(a)]\, g(x) + f(a)\, [g(x) - g(a)]}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times g(x) + f(a) \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\end{aligned}$$

Comme f et g sont dérivables en a, g est continue en a d'après A.1, donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

ce qui prouve que fg est dérivable en a et que : $(fg)' = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4. Soit $a \in I$. Comme $g(a) \neq 0$ et comme g est continue en a (car elle est dérivable), il existe un voisinage V_a de a sur lequel g ne s'annule pas et on a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in V_a \setminus \{a\},\ \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} &= \frac{\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}{g(x)g(a)} \\ &= -\frac{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

et donc, comme g est continue et dérivable en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

ce qui prouve que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et que : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{[g(a)]^2}$.

5. Se déduit directement des deux points précédents en remarquant que : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$.

6. Soit $a \in I$. On note $b = f(a)$ et :

$$\forall y \in J,\ \setminus\{b\},\ \varepsilon(y) = \frac{h(y) - h(b)}{y - b} + h'(b) \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = h'(b)$$

de sorte que l'on a :

$$\forall y \in J,\ h(y) = h(b) + h'(b)\,(y - b) + (y - b)\,\varepsilon(y) \tag{20.1}$$

et en particulier, en prenant $y = f(x)$:

$$\forall x \in I,\ (h \circ f)(x) = (h \circ f)(a) + (h' \circ f)(a)\,[f(x) - f(a)] + [f(x) - f(a)]\,(\varepsilon \circ f)(x)$$

et donc :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \frac{(h \circ f)(x) - (h \circ f)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,[(h' \circ f)(a) + (\varepsilon \circ f)(x)]$$

Or, comme h est dérivable en b, ε est continue en b. De plus, comme f est dérivable en a, elle est aussi continue en a, donc :

$$\lim_{x \to a} (\varepsilon \circ f)(x) = 0$$

et donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{(h \circ f)(x) - (h \circ f)(a)}{x - a} = f'(a)\,(h' \circ f)(a)$$

ce qui prouve que $h \circ f$ est dérivable en a et que : $(h \circ f)'(a) = f'(a)\,(h' \circ f)(a)$.

Remarque Si l'égalité (20.1) utilisée pour démontrer le dernier point peut sembler « tombée du ciel » pour le béotien, il est intéressant de noter qu'il s'agit d'une méthode classique pour déterminer des limites lorsqu'il y a une indétermination : cette égalité est appelée *développement limité à l'ordre* 1 (voir chapitre 21).

F. Tableaux de synthèse

Certaines notions, comme les limites et les dérivées usuelles, étant présentées dans le cours au fur et à mesure de l'introduction des fonctions de référence, nous nous permettons de les récapituler ici sous forme de tableaux, afin qu'ils puissent être retrouvés rapidement en cas de besoin.

Opérations sur les limites

Limite de la somme de deux fonctions

Dans le tableau suivant, on a reporté la limite de $f+g$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et « FI » signifie « forme indéterminée ».

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
$+\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$

Limite du produit de deux fonctions

Dans le tableau suivant, on a reporté la limite de $f \times g$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et « FI » signifie encore « forme indéterminée ».

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Limite du quotient de deux fonctions

Dans le tableau suivant, on a reporté la limite de $\dfrac{f}{g}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et « FI » signifie toujours « forme indéterminée ».

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	0	$-\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	0	0	0	0	FI	FI

Croissances comparées

Soit a et b deux réels strictement positifs.

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^{x^b}} = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^a}{e^{x^b}} = 0$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^b}}{x^a} = +\infty$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^b}}{(\ln(x))^a} = +\infty$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{(\ln(x))^a} = +\infty$

vii. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a(\ln(x))^b = 0$

Équivalents de référence

Soit α un réel quelconque.

i. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

ii. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

iii. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

iv. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

v. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

vi. $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$

vii. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Dérivées des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, f est une fonction dérivable en tout point d'une partie D de $\mathbb{R}$, f' désigne la dérivée de f sur D, n est un entier relatif, α est un réel strictement positif et c une constante réelle.

f	f'	D	f	f'	D
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$	$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\tan$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\arctan$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda u)' = \lambda u'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{si } v \text{ ne s'annule pas sur } I$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{si } v \text{ ne s'annule pas sur } I$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle J et si v est une fonction dérivable sur J, alors :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

En particulier, si u est dérivable sur I, à valeurs dans J, on a :

formule	J
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathbb{R}_+^*$

Sommaire