18 Généralités sur les fonctions

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

Les notions abordées dans cette partie ont été abordées en grande partie dans le secondaire et sont à peine approfondies. C'est pourquoi le lecteur ayant des difficultés sur les points abordés ici à se reporter à un manuel de terminale.
Dans l'ensemble du chapitre, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A. Définitions

A.1. Notions de base sur les fonctions

Définition 18.1

On dit que f est une **fonction** réelle d'une variable réelle si f est une relation associant à tout réel x au plus un réel y. Dans ce cas :

i. si y est un réel associé au réel x par f, y est appelé **image** de x par f et on note $y = f(x)$,

ii. si y et x sont deux réels tels que $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f,

iii. l'ensemble des réels ayant une image par f est appelé **ensemble de définition** de f et noté $\mathcal{D}_f$,

iv. l'ensemble $\{f(x),\, x \in \mathcal{D}_f\}$ est appelé **ensemble image** de f,

v. l'ensemble $\{(x, f(x)),\, x \in \mathcal{D}_f\}$ est appelé **graphe** de f.

Remarques

a. Comme on n'envisage dans ce chapitre que des fonctions réelles d'une variable réelle, on parlera plus simplement de fonction.

b. Si f est une fonction telle que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, tout réel a exactement une image par f, donc f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c. Il est équivalent de dire « la fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ » et « l'application f de I dans $\mathbb{R}$ ».

Définition 18.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant un réel a. On dit que a est un **zéro** de f si : $f(a) = 0$.

A.2. Fonctions majorées, minorées, bornées

Dans tout ce paragraphe, f désigne une fonction et I un ensemble inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Définition 18.3

i. On dit que f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$$

Dans ce cas, un tel réel M est appelé **majorant** de f.

ii. On dit que f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$$

Définition 18.4

On dit que f est **bornée** sur I si elle est majorée et minorée sur I.

Remarques

a. La fonction f est bornée sur I si et seulement si la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est majorée sur I.

b. Si f admet un majorant M sur I, elle admet une infinité de majorant, puisque tout réel supérieur ou égal à M est aussi un majorant de f.

Théorème 18.5

i. Si f est **majorée** sur I, f admet un plus petit majorant, appelé **borne supérieure** de f, noté $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x\in I} f(x)$. De plus on a :

$$\sup_I f = \sup\{f(x), x \in I\}$$

ii. Si f est **minorée** sur I, f admet un plus grand minorant, appelé **borne inférieure** de f, noté $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x\in I} f(x)$. De plus on a :

$$\inf_I f = \inf\{f(x), x \in I\}$$

Définition 18.6

Soit a un élément de I.

i. On dit que f admet un **maximum global** (ou absolu) sur I en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)$$

Dans ce cas, on note $f(a) = \max\limits_I f$ ou $f(a) = \max\limits_{x\in I} f(x)$.

ii. On dit que f admet un **minimum global** (ou absolu) sur I en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a)$$

Dans ce cas, on note $f(a) = \min\limits_I f$ ou $f(a) = \min\limits_{x\in I} f(x)$.

iii. On dit que f admet un **extremum global** (ou absolu) sur I en a si f admet un maximum ou un maximum global en a.

Remarques

a. Attention à ne pas confondre un extremum $f(a)$ de f et le point a où celui-ci est atteint : a n'est pas un extremum de f.

b. On dira plus simplement que f a un maximum global (respectivement un minimum global) si elle admet un maximum gloabl (resp. un minimum global) sur $\mathcal{D}_f$.

c. Si f admet un maximum (respectivement un minimum) global en a, elle est donc majorée (resp. minorée) et $f(a)$ est un majorant (resp. un minorant) atteint par f.

d. Par conséquent, si f admet un maximum (respectivement un minimum) gloabl sur I, f admet une borne supérieure (resp. inférieure) sur I et $\max\limits_I f = f(a)$ (resp. $\min\limits_I f = f(a)$).

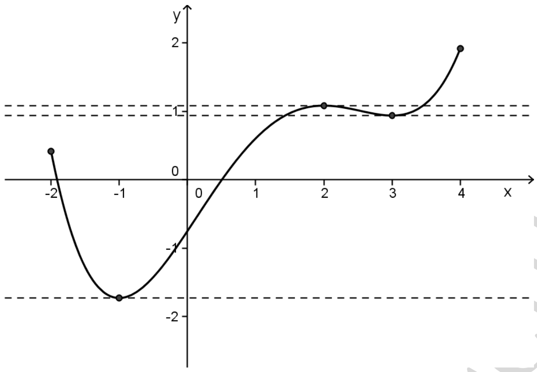
e. En revanche, une fonction peut être majorée (respectivement minorée) sans admettre de maximum (resp. de minimum). C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui est majorée par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ mais n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}_-^*$, et minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 18.7

Soit a un élément de I. S'il existe un réel α strictement positif tel que la restriction de f à $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ admette un maximum (resp. un minimum) global en a, on dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local sur I en a.

Remarque Si f admet un extremum global en a, alors cet extremum est aussi un extremum local ; en revanche, la réciproque est fausse.

Exemple 18.1 Le graphe suivant est celui d'une fonction f définie sur $[-2, 4]$.



On peut voir sur le graphique que f admet un maximum local en -2, en 2 et en 4 et un minimum local en -1 et 3. De plus, elle admet un maximum global en 4 et un minimum global en -1.

B. Sens de variation d'une fonction

Dans cette partie, I est une partie de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 18.8

Étant donnée une fonction f, on dit que :

i. f est **croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,

ii. f est **strictement croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

iii. f est **décroissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,

iv. f est **strictement décroissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

v. f est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur I si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante) sur I.

Exemple 18.2 Le lecteur pourra vérifier avec la définition que :

- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{2n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$,
- la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$; attention, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 18.9

i. Si f est g sont deux fonctions croissantes (respectivement strictement croissantes) sur I, alors $f + g$ est croissante (respectivement strictement croissante) sur I.

ii. Si f est g sont deux fonctions décroissantes (respectivement strictement décroissantes) sur I, alors $f + g$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

Proposition 18.10

i. si f et g sont deux fonctions croissantes et positives sur I, alors $f\,g$ est croissante sur I.
ii. Si f et g sont deux fonctions décroissantes et positives sur I, alors $f\,g$ est décroissante sur I.

Remarque Attention : on ne peut en général rien dire quant à la monotonie de $f\,g$ si f et g ont la même monotonie mais ne sont pas de signe constant sur I. Par exemple, on peut vérifier que les fonctions $f : x \mapsto -x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sont toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}^-$, alors que la fonction $f\,g : x \mapsto -x^5$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Proposition 18.11

i. Si f est croissante (resp. décroissante) sur I et si λ est un réel positif, alors λf est croissante (resp. décroissante) sur I.
ii. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I et si λ est un réel strictement positif, alors λf est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.
iii. Si f est croissante (resp. décroissante) sur I et si λ est un réel négatif, alors λf est décroissante (resp. croissante) sur I.
iv. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I et si λ est un réel strictement négatif, alors λf est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur I.

Proposition 18.12

Soient f une fonction définie sur I et à valeurs dans une partie J de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
i. Si f et g ont la même monotonie respectivement sur I et J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
ii. Si f et g ont des monotonies contraires respectivement sur I et J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exercice 18.1

1. Démontrer la proposition 18.9.
2. Démontrer la proposition 18.10.
3. Démontrer la proposition 18.11.
4. Démontrer la proposition 18.12.

Proposition 18.13

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et (x, y) un couple d'éléments de I.
i. Si f est **strictement croissante** sur I, alors :

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

ii. Si f est **strictement décroissante** sur I, alors :

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) > f(y)$$

Remarque Ce résultat est très utile pour comparer deux nombres : si f est une fonction strictement monotone sur I, pour comparer deux nombres x et y appartenant à I, il suffit de comparer $f(x)$ et $f(y)$.

C. Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 18.14

On suppose que I est une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0 (c'est-à-dire telle que, si x appartient à I, alors $-x$ appartient à I). On dit que :

i. f est **paire** sur I si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$,

ii. f est **impaire** sur I si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemples 18.3

a. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sont impaires sur leurs ensembles de définition respectifs.

b. Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) sont paires sur $\mathbb{R}$.

Remarques

a. On peut remarquer que, si f est une fonction impaire définie en 0, alors nécessairement : $f(0) = 0$.

b. Pour étudier une fonction f paire ou impaire sur un ensemble I centré en 0, il suffit donc d'étudier f sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

Définition 18.15

On suppose que I est une partie de $\mathbb{R}$ et que T est un réel tel que, si x appartient à I, alors $x + T$ appartient à I.
On dit que f est périodique et que T est une période de f (ou plus simplement que f est T–périodique) si :

$$\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$$

D. Fonctions convexes, concaves

Dans toute cette partie, on munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. De plus, toutes les fonctions envisagées sont supposées définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f et g sont deux fonctions définies sur I, on dit que la courbe représentative de f est au-dessus de celle de g si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant g(x)$$

De même, on dit que la courbe représentative de f est en dessous de celle de g si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$$

Définition 18.16

i. On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

ii. On dit que f est **concave** sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

Remarques

a. Dans ces définitions, seules les valeurs de λ appartenant à $]0,1[$ importent, puisque, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, il y a toujours égalité.

b. Autrement dit, une fonction convexe est une fonction dont le graphe est en dessous de ses cordes et une fonction concave est une fonction dont le graphe est au dessus de ses cordes.

Ci-dessous un exemple de représentation graphique d'une fonction convexe ainsi que de la corde $[AB]$ joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$:

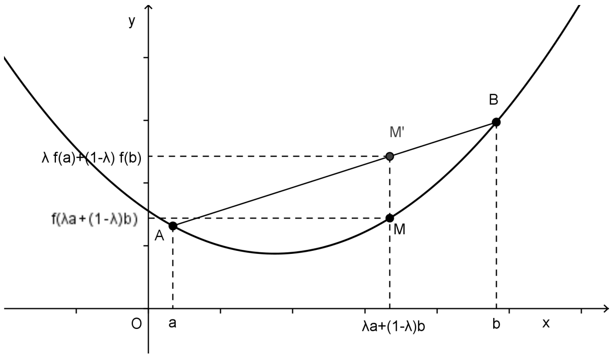


FIGURE 18.1 – Exemple de représentation graphique d'une fonction convexe

Définition 18.17

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overset{\circ}{I}$. On dit que le point de coordonnées $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ soit inclus dans I et tel que :

- ou bien f est convexe sur $]a-\alpha, a]$ et concave sur $[a, a+\alpha[$,
- ou bien f est concave sur $]a-\alpha, a]$ et convexe sur $[a, a+\alpha[$.

Théorème 18.18 ▶ Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Preuve On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathscr{P}(n) : « \ \forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in I^n,\ \forall (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in (\mathbb{R}^+)^n,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \ »$$

est vraie.

◇ $\mathscr{P}(1)$ est vraie (c'est une égalité).

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et considérons une famille $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ d'éléments de I et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

On suppose tout d'abord que λ_{n+1} est différent de 1. On a alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or λ_{n+1} appartient à $[0,1]$ et on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ 0 \leqslant \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} \leqslant 1$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

donc, comme $x_1, \dots, x_n$ appartiennent à I et comme I est un intervalle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k \in I$$

Il en découle, comme f est convexe :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})\, f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}\, x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence et comme $1-\lambda_{n+1} \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leqslant (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.
Par ailleurs, si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, donc l'inégalité est encore vraie (c'est même une égalité dans ce cas).
Finalement $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

- On peut maintenant conclure que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

E. Éléments de symétrie

Proposition 18.19

On suppose que f est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et que a et b sont deux réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Rightarrow 2a - x \in I$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

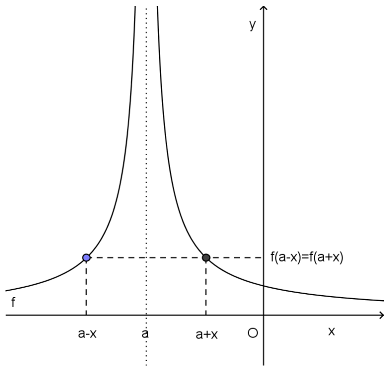
i. La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si :

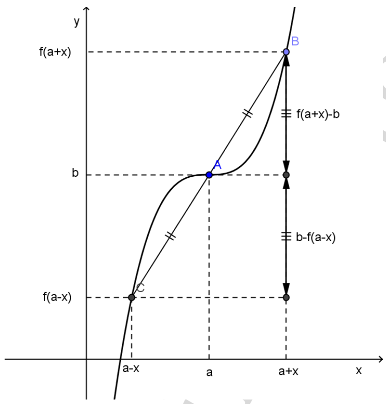
$$\forall x \in \mathbb{R} \ /\ a - x \in I,\ f(a-x) = f(a+x) \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in I,\ f(2a-x) = f(x)$$

ii. La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ /\ a - x \in I,\ f(a-x) - b = b - f(a+x) \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in I,\ f(2a-x) = 2b - f(x)$$

Axe de symétrie $x = a$	**Centre de symétrie (a, b)**
$\forall x \in \mathbb{R} \;/\; a - x \in I,\; f(a-x) = f(a+x)$	$\forall x \in \mathbb{R} \;/\; a - x \in I,\; f(a-x) - b = b - f(a+x)$





Remarque Dans le cas où $a = b = 0$, on constate qu'une fonction est paire si et seulement si son graphe dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et qu'une fonction est impaire si et seulement si son graphe dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine.

F. Fonctions en escalier

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux réels tels que : $a < b$.

Définition 18.20

On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute famille $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (n étant un entier naturel non nul) telle que :

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$$

On appelle **pas de la subdivision** σ le réel $|\sigma|$ défini par :

$$|\sigma| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$

Exemple 18.4 On peut construire une subdivision de $[a, b]$ en posant :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ \sigma_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

Celle-ci est appelée subdivision régulière de $[a, b]$ car :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \sigma_k - \sigma_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

Définition 18.21

Soit f une fonction réelle à valeurs réelles. On dit que f est une fonction en escaliers si, pour tout couple (a, b) de réels tel que $a < b$, il existe une subdivision $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]\sigma_{k-1}, \sigma_k[$ soit constante.

G. Fonctions de référence

G.1. Fonctions affines

Définition 18.22

On dit que f est une **fonction affine** si f est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

Remarque Le graphe de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est donc la droite d'équation $y = ax + b$.

Proposition 18.23

Soient a, a', b, b' quatre réels tels que : $a \neq a'$. L'unique droite passant par les points de coordonnées respectives (a, b) et (a', b') a pour équation réduite

$$y = \frac{b' - b}{a' - a}(x - a) + b$$

G.2. La fonction valeur absolue

Définition 18.24

La fonction **valeur absolue** est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée $|\cdot|$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 18.5 La valeur absolue de 3 est : $|3| = 3$, la valeur absolue de -3 est : $|-3| = 3$.

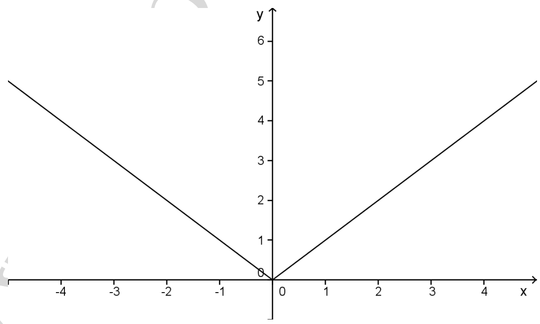


FIGURE 18.2 – Représentation graphique de la fonction valeur absolue

Remarques

a. Il découle de manière immédiate de la définition que, pour tout réel x : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

b. En particulier, on peut remarquer que, pour tout réel x :

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{et} \quad |x|^2 = x^2$$

Théorème 18.25

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :

i. $|x| \geqslant 0$, *ii.* $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, *iii.* $|xy| = |x|\,|y|$.

Preuve

i. Si x est positif ou nul, $|x| = x$ est positif ou nul ; si x est négatif, $|x| = -x$ est positif.

ii. Si x n'est pas nul, $-x$ n'est pas nul et donc : $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

iii. Soient x et y deux réels.

— Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ et : $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
— Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$, alors $xy \leqslant 0$ et : $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$.
— Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ et : $|xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|$.
— Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$ et : $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$.

□

Théorème 18.26 ▶ Inégalité triangulaire

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Théorème 18.27 ▶ Seconde inégalité triangulaire

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de nombres réels, on a :

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Remarque Il arrive parfois que la preuve de ce résultat soit demandée.

Exercice 18.2

1. Démontrer le théorème 18.26.
2. Démontrer le théorème 18.27.

G.3. La fonction partie entière

Théorème 18.28

Pour tout réel x, il existe un unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ainsi définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est appelée fonction **partie entière**. Pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ est appelé partie entière de x.

Remarque La partie entière d'un réel x est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $\mathbb{Z}$ n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$, donc il existe un entier p tel que : $p \leqslant x$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \;/\; n \leqslant x\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et majorée, donc elle contient un plus grand élément $\lfloor x \rfloor$, ne dépendant que de x et qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

□

Exemple 18.6 La partie entière de $2,5$ est : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, la partie entière de $-2,5$ est : $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$.

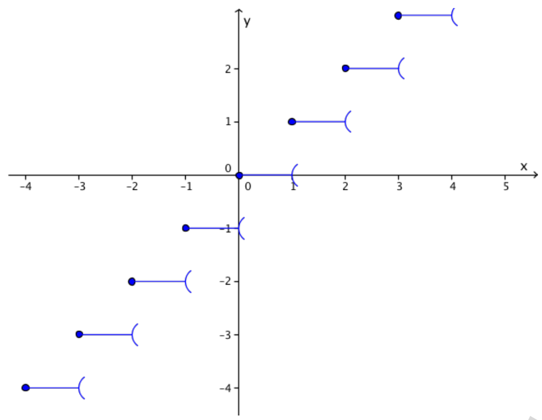


FIGURE 18.3 – Représentation graphique de la fonction partie entière

G.4. Fonctions polynômes

Les résultats de ce paragraphe sont admis. Le lecteur trouvera une preuve plus général dans le chapitre 5. Polynômes.

Définition 18.29

i. On dit que f est une **fonction polynôme** si f est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un entier naturel n et une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

Les réels $a_0,\dots,a_n$ sont appelés coefficients de f.

ii. On dit que f est une fonction polynôme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est la restriction à I d'une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

Théorème 18.30

Soit P une fonction polynôme telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

P est constante nulle si et seulement si et seulement si ses coefficients $a_0,\dots,a_n$ sont tous nuls.

Définition 18.31

Soit P une fonction polynôme telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

Si $P\neq 0$, on appelle **degré** de P la plus grande valeurs de k, notée $\deg(P)$, telle que $a_k\neq 0$.
Si $P=0$, on pose par convention : $\deg(P)=-\infty$.

Définition 18.32

Soit P une fonction polynôme. On dit qu'un réel λ est **racine** de P si λ est un zéro de P, c'est-à-dire si : $P(\lambda)=0$.

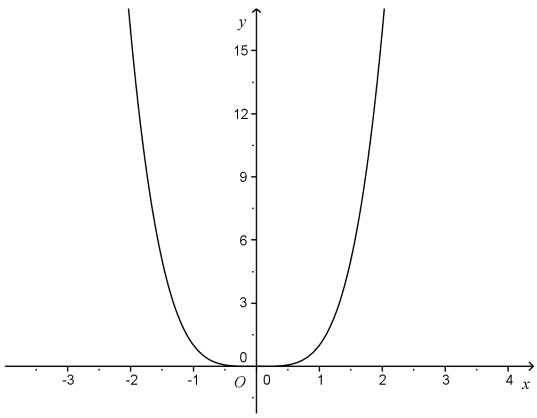
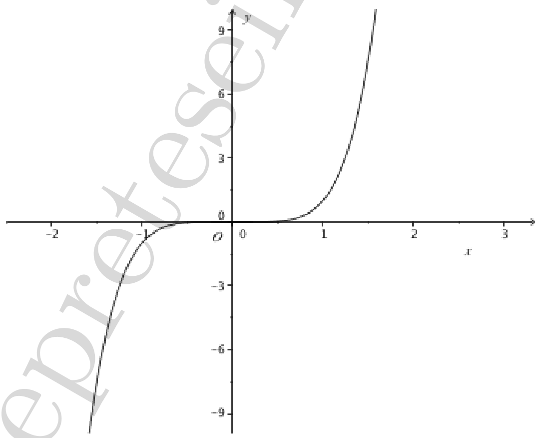
Proposition 18.33

Soit P une fonction polynôme. Le réel λ est racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - \lambda)\, Q(x)$$

Remarque Si le réel λ est racine de la fonction polynôme P, on dit alors que la fonction polynôme $x \mapsto x - \lambda$ divise P.

Allure de la courbe représentative de $x \mapsto x^n$

Cas où n est pair (ici $n = 4$)	**Cas où n est pair (ici $n = 5$)**
	

G.5. Trinômes du second degré

Définition 18.34

Une fonction f est appelée fonction trinôme du second degré si f est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un triplet (a, b, c) de réels tel que $a \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

Définition 18.35

Soit (a, b, c) un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. Étant donnée la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de P.

Théorème 18.36

Soit (a, b, c) un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. On considère la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

i. Si $\Delta > 0$, P admet exactement deux racines réelles distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$P(x)$ est alors du signe de a si $x < x_1$ ou $x > x_2$ et du signe de $-a$ si $x \in]x_1, x_2[$.

ii. Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine réelle, qui est : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
$P(x)$ est alors du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii. Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de racine réelle. $P(x)$ est alors du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve

Comme $a \neq 0$, on écrit $P(x)$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

i. Si $\Delta > 0$, alors :

$$P(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Finalement, l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

ii. Si $\Delta = 0$, alors :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Finalement, l'équation $P(x) = 0$ admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme unique solution et $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii. Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ n'est jamais nul et toujours du signe de a.

□

Proposition 18.37

Soit (a, b, c) un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. La fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un unique extremum global sur $\mathbb{R}$, atteint uniquement en $x = -\dfrac{b}{2a}$ et égal à $-\dfrac{\Delta}{4a}$:

- si $a > 0$, il s'agit d'un minimum global,
- si $a < 0$, il s'agit d'un maximum global.

De plus, la représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthonormé est une parabole admettant la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

G.6. Fonctions rationnelles

Définition 18.38

i. On dit que f est une **fonction rationnelle** s'il existe deux fonctions polynômes P et Q telles que :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ Q(x) \neq 0\} \quad \text{et} \quad \forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ii. On dit que f est une fonction rationnelle sur une partie I de $\mathbb{R}$ si f est la restriction à I d'une fonction rationnelle.

Exemples 18.7 **a.** La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - x + 3}{x^2 + 1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction inverse est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^*$.

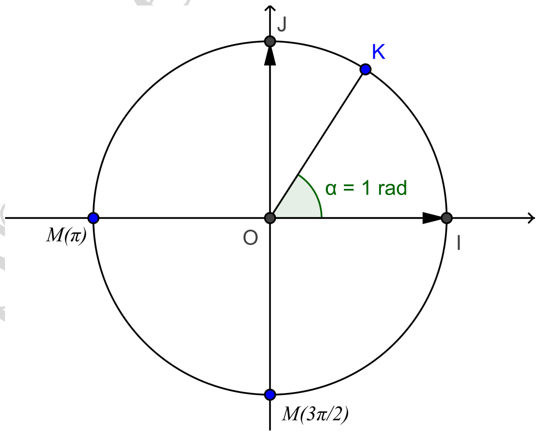
Remarque Attention à ne pas confondre quotient et fonction rationnelle.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + x^2 - 1}{x^2 + 1}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, n'est pas une fonction rationnelle, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + x^2 - 1$ n'est pas une fonction polynôme.

G.7. Fonctions trigonométriques

Dans ce paragraphe, on munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) et C désigne le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique**, c'est-à-dire l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$.

On appelle **sens trigonométrique** (ou **sens direct**) le sens du plus court chemin pour aller de I à J en parcourant le cercle trigonométrique.
Le **radian** est une unité de mesure des angles : K étant un point du cercle C, l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OK})$ mesure 1 radian s'il est dans le sens direct et si l'arc de cercle $\widehat{IK}$ est de longueur $OI = 1$.
À tout réel x, on associe l'unique point $M(x)$ du cercle trigonométrique tel que la longueur du chemin de I à $M(x)$ (dans le sens direct si x est positif, dans le sens indirect si x est négatif) sur le cercle trigonométrique soit égale à x. $M(x)$ est appelé image de x sur le cercle trigonométrique.
Par exemple, comme la circonférence du cercle C est égale à 2π :



- $M(0)$ est le point I,
- $M(1)$ est le point K,
- $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ est le point J,
- $M(\pi)$ est le point de coordonnées $(-1, 0)$,
- $M(2\pi), M(4\pi), M(2k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ ont tous pour coordonnées $(1, 0)$ et sont donc égaux au point I,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M(x + 2k\pi)$ est confondu avec le point $M(x)$.

Définition 18.39

En conservant les notations précédentes, on définit les fonctions **cosinus** (notée cos) et **sinus** (notée sin) en notant, pour tout réel x, $(\cos(x), \sin(x))$ les coordonnées de $M(x)$.

Remarque On remarque que $\cos(x) = 0$ si et seulement si le point $M(x)$ a pour abscisse 0, donc si et seulement s'il existeun entier k tel que : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. On peut donc envisager la définition suivante :

Définition 18.40

On définit la fonction **tangente** (notée tan) par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Tableau des valeurs remarquables

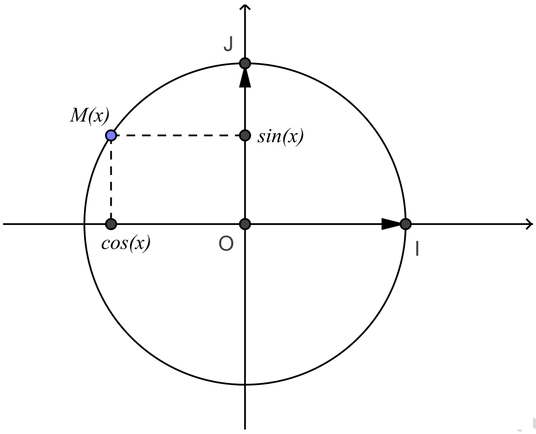


Figure 18.4 – Définition des fonctions cos et sin

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 18.41

i. Les fonctions cos et sin sont périodiques, de période 2π sur $\mathbb{R}$.

ii. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$.

iii. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et sur $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, strictement croissante sur $[-\pi,0]$ et plus généralement sur $[(2k-1)\pi,2k\pi]$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

iv. La fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

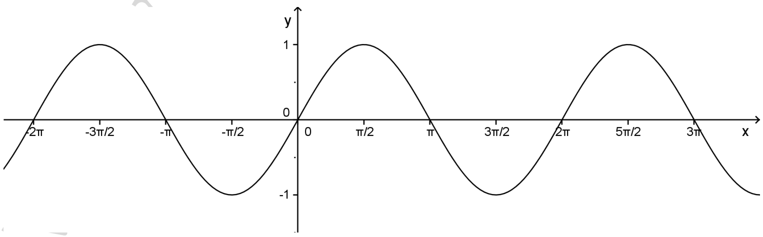


Figure 18.5 – Représentation graphique de la fonction sinus

Proposition 18.42

i. La fonction tangente est périodique, de période π.

ii. La fonction tangente est impaire.

iii. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

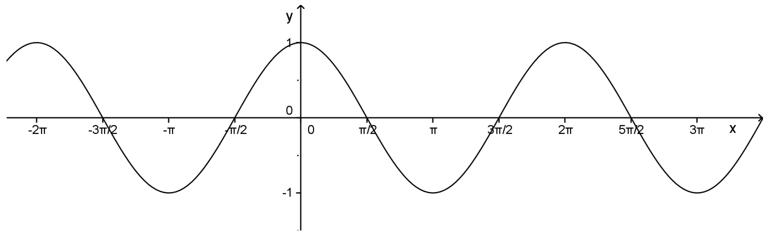


FIGURE 18.6 – Représentation graphique de la fonction cosinus

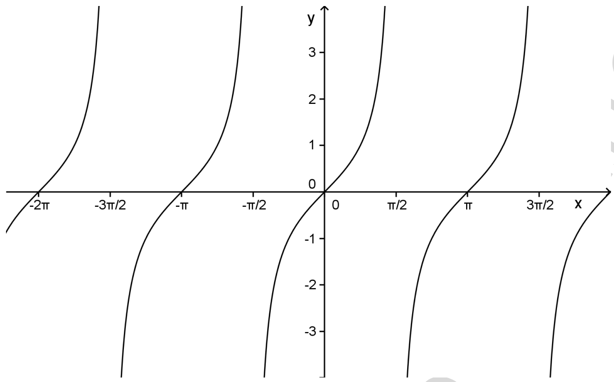


FIGURE 18.7 – Représentation graphique de la fonction tangente

Proposition 18.43 ▶ Formules d'addition

Pour tout couple (a, b) de nombres réels, on a :

i. $\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b)$,

ii. $\cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + \sin(a)\,\sin(b)$,

iii. $\sin(a+b) = \sin(a)\,\cos(b) + \cos(a)\,\sin(b)$,

iv. $\sin(a-b) = \sin(a)\,\cos(b) - \cos(a)\,\sin(b)$.

On a donc en particulier :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

Exercice 18.3 Soit a et b deux réels. Établir les égalités suivantes :

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
3. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
4. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
5. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
6. $\cos(a) + \cos(b) = 2\,\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
7. $\cos(a) - \cos(b) = -2\,\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
8. $\sin(a) + \sin(b) = 2\,\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
9. $\sin(a) - \sin(b) = 2\,\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Proposition 18.44

Pour tout couple (a, b) de nombres réels, on a :

i. $\cos(a+\pi) = \cos(a-\pi) = -\cos(a)$

ii. $\sin(a+\pi) = \sin(a-\pi) = -\sin(a)$

iii. $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(a+k\pi) = (-1)^k \cos(a)$

iv. $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(a+k\pi) = (-1)^k \sin(a)$

v. $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

vi. $\sin(\pi - a) = \sin(a)$

vii. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$

viii. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

Remarque Les propositions précédentes découlent de la définition des fonctions sinus et cosinus mais aussi d'arguments géométriques. La géométrie étant abandonnée en prépa ECG, nous ne les démontrons pas ici.

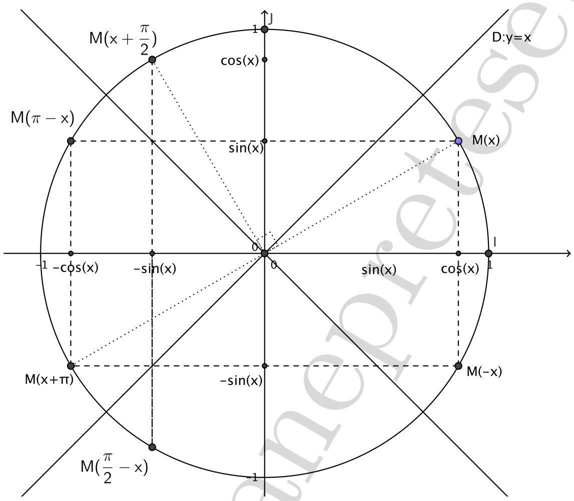


FIGURE 18.8 – Comment retrouver les formules de trigonométrie à l'aide du cercle trigonométrique

Proposition 18.45

On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ |\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant |\tan(x)|$$

Remarques

a. Ce résultat n'est pas réellement au programme, mais nous le proposons ici car il est fondamental pour la démonstration des propriétés analytiques (continuité, dérivabilité) des fonctions trigonométriques, que nous établirons dans les chapitres suivants.

b. Nous rassurons le lecteur heureux d'avoir abandonné la géométrie (s'il y en a) : ce type de démonstration géométrique n'est en général pas nécessaire aux concours.

G.8. Le logarithme népérien

Les résultats de ce paragraphe et des suivants sont présentés ici pour faire une synthèse de toutes les fonctions de référence. Ils seront précisés et démontrés dans le chapitre 17.

Théorème 18.46

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Cette fonction est appelée **logarithme népérien** et notée ln.

Proposition 18.47

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 18.48

Soient a, b deux réels strictement positifs et n un entier relatif. On a :

i. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *ii.* $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ *iii.* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

iv. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

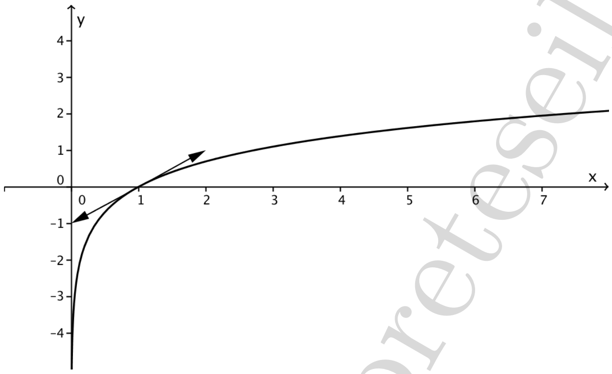


FIGURE 18.9 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln(x)$

G.9. La fonction exponentielle

Définition 18.49

La réciproque de la fonction ln est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, appelée **fonction exponentielle** et notée exp ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Remarques

a. Il découle immédiatement de la définition que : $\exp(0) = 1$.

b. Le nombre $\exp(1)$ est plus simplement noté e et il peut être utile de savoir que : $\mathrm{e} \simeq 2,72$, ou au moins que : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Proposition 18.50

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 18.51

Soient a, b deux réels et n un entier relatif. On a :

i. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ *ii.* $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ *iii.* $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

iv. $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

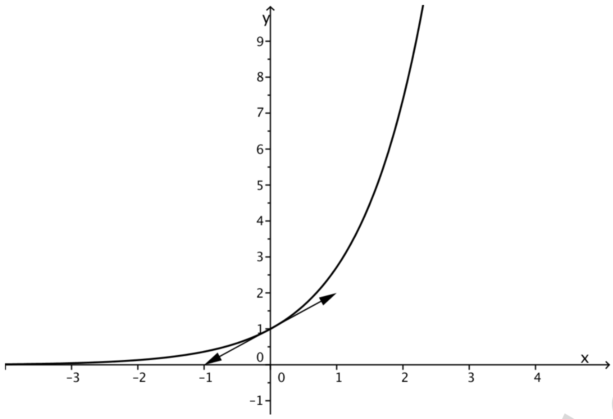


FIGURE 18.10 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

G.10. Les fonctions puissances

Dans ce paragraphe, a désigne un réel quelconque.

Définition 18.52

On appelle fonction puissance d'exposant a la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$$

On note aussi plus simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = \mathrm{e}^{a\ln(x)} = x^a$$

Proposition 18.53

Pour tout réel a et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln(x^a) = a\ln(x)$$

Proposition 18.54

Soient a, b deux réels, x, y deux réels strictement positifs. On a :

i. $x^{a+b} = x^a\, x^b$ *ii.* $x^{-a} = \dfrac{1}{x^{-a}}$ *iii.* $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$

iv. $(x^a)^b = x^{ab}$ *v.* $(xy)^a = x^a\, y^a$ *vi.* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

H. Correction des exercices

Correction de l'exercice 18-1

1. On démontre le point *i*, le point *ii* est analogue. On suppose que f et g sont croissantes sur I. On a donc :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) \\ g(x) \leqslant g(y) \end{cases}$$

et donc, en « additionnant ces deux inégalités » :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$$

donc $f + g$ est croissante sur I.
Le cas où f et g sont strictement croissantes sur I se démontre de façon analogue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

2. On démontre le point *i*, le point *ii* est analogue. On suppose que f et g sont croissantes et positives sur I. On a donc :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant f(x) \leqslant f(y) \\ 0 \leqslant g(x) \leqslant g(y) \end{cases}$$
et donc, en « multipliant ces deux inégalités » (les termes étant tous positifs !) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x)\, g(x) \leqslant f(y)\, g(y)$$
donc $f\,g$ est croissante sur I.
3. *i.* Supposons que f soit une fonction croissante sur I et que λ soit un réel positif. On a alors :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
et donc, en mutlipliant par λ (qui est positif) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \lambda f(x) \leqslant \lambda f(y)$$
donc λf est croissante sur I. Le cas où f est décroissante est analogue.

   ii. Se démontre comme le point précédent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

   iii. Supposons que f soit une fonction croissante sur I et que λ soit un réel négatif. On a alors :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
et donc, en mutlipliant par λ (qui est négatif, donc on change le sens des inégalités) :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow \lambda f(x) \geqslant \lambda f(y)$$
donc λf est décroissante sur I. Le cas où f est décroissante est analogue.

   iv. Se démontre comme le point précédent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
4. *i.* On traite le cas où f et g sont décroissantes respectivement sur I et J, le cas où elles sont croissantes se traitant de façon analogue. On a donc :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \\ \forall (u,v) \in J^2,\ u < v \Rightarrow g(u) \geqslant g(v) \end{cases}$$
et donc, comme, pour tout couple (x,y) d'éléments de I, $u = f(y)$ et $v = f(x)$ appartiennent à J :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$$
donc $g \circ f$ est croissante sur I.

   ii. On traite le cas où f est décroissante sur I et g est croissante sur J, le second cas se traitant de façon analogue. On a donc :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \\ \forall (u,v) \in J^2,\ u < v \Rightarrow g(u) \leqslant g(v) \end{cases}$$
et donc, comme, pour tout couple (x,y) d'éléments de I, $u = f(y)$ et $v = f(x)$ appartiennent à J :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow g \circ f(y) \leqslant g \circ f(x)$$
donc $g \circ f$ est décroissante sur I.

Correction de l'exercice 18-2

1. Pour éviter le « problème » de la valeur absolue, on compare donc les carrés. Pour tout couple (x,y) de réels, on a :
$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy \end{aligned}$$
et donc, (en rappelant que $t \leqslant |t|$ pour tout réel t) :
$$\begin{aligned} |x+y|^2 &\leqslant x^2 + y^2 + 2\,|xy| \\ &\geqslant (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$
ce qui prouve le résultat attendu puisque la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |a + b| \leqslant |a| + |b|$$

et donc, en posant $a = x - y$ et $b = y$:

$$|x| \leqslant |x - y| + |y|$$

soit encore :

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

En échangeant x et y, on a aussi :

$$|y| - |x| \leqslant |y - x|$$

et donc, comme $|y - x| = |x - y|$:

$$-|y - x| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

ce qui prouve le résultat attendu.

Correction de l'exercice 18-3

Rappelons que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{18.1}$$
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \tag{18.2}$$
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{18.3}$$
$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \tag{18.4}$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{18.5}$$

1. En prenant (18.1) avec $x = y = a$, on obtient :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

Or, d'après 18.5, on a aussi :

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) \quad \text{et} \quad \cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$$

d'où :

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)}$$

2. En prenant (18.3) avec $x = a = b$, on a directement :

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$$

3. D'après (18.1) et (18.2), on a :

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases}$$

donc, en additionnant les deux lignes et en divisant par 2 :

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]}$$

4. De même, en faisant $L_2 - L_1$ dans le système précédent puis en divisant par 2 :

$$\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]}$$

5. D'après (18.3) et (18.4), on a :

$$\begin{cases}\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{cases}$$

donc, en additionnant les deux lignes et en divisant par 2 :

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]}$$

6. On a :

$$\cos(a) + \cos(b) = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$$

donc, d'après (18.1) et (18.2) avec $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$:

$$\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

7. On obtient de même :

$$\boxed{\cos(a) - \cos(b) = -2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

8. On a :

$$\sin(a) + \sin(b) = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$$

donc, d'après (18.3) et (18.4) avec $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$:

$$\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

9. On obtient de même :

$$\boxed{\sin(a) - \sin(b) = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

I. Pour aller plus loin

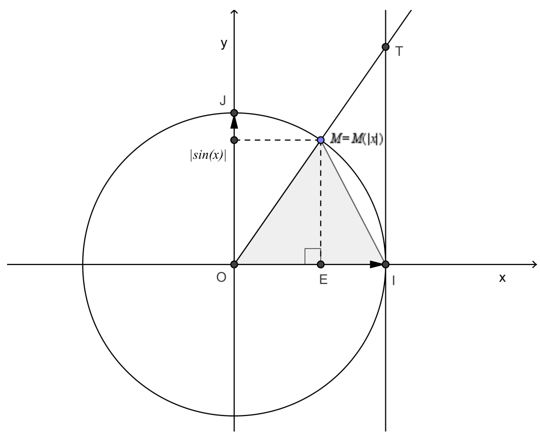
Preuve de la proposition 18.45

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut déjà remarquer que, comme sin et tan sont impaires et comme cos est paire, on a :

$$|\sin(x)| = \sin|x|\,, \quad |\tan(x)| = \tan|x| \quad \text{et} \quad \cos|x| = \cos(x)$$

On considère le point $M = M(|x|)$, image de $|x|$ sur le cercle C et on note :

- E le point de coordonnées $(\cos|x|\,, 0)$, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses,
- T le point de coordonnées $(1, \tan|x|)$, intersection de la demi-droite $[OM)$ et de la perpendiculaire à (OI) passant par I.



On remarque que le triangle OIM est inclus dans le secteur angulaire S d'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ et délimité par l'arc $\widehat{IM}$, lui-même inclus dans le triangle OIT. Ainsi, l'aire A_1 du triangle OIM est inférieure ou égale à l'aide A_2 de S, elle-même inférieure ou égale à l'aide A_3 de OIT. Or, comme l'arc $\widehat{IM}$ est de longueur $|x|$ et comme la circonférence du cercle trigonométrique est 2π, on a :

$$A_1 = \frac{OI \times EM}{2} = \frac{|\sin(x)|}{2}, \quad A_2 = \pi \times OI^2 \times \frac{|x|}{2\pi} = \frac{|x|}{2} \quad \text{et} \quad A_3 = \frac{OI \times OT}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

et donc :

$$\frac{\sin|x|}{2} \leqslant \frac{|x|}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2}$$

ce qui donne le résultat annoncé en divisant par 2.

Sommaire