17 Comparaison asymptotique de suites

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

A. Suite négligeable devant une autre

Définition 17.1

Soient u et v deux suites réelles.
On dit que u est négligeable devant v (ou que u_n est négligeable devant v_n quand n tend vers $+\infty$) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n\, v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$, ou plus simplement $u_n = \circ(v_n)$.

Exemple 17.1 Le lecteur pourra vérifier que :

$$\forall \alpha \in]1, +\infty[,\ \frac{1}{n^\alpha} = \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

Remarques

a. Si u est négligeable devant v, on dit aussi que v est prépondérante sur u.
b. L'égalité $u_n = \circ(v_n)$ se lit « u_n est un petit o de v_n ».
c. De la définition, on déduit de manière immédiate la proposition suivante :

Proposition 17.2

Soient u et v deux suites réelles.
Si les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n = \circ(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Remarques

a. Attention : même si c'est le plus souvent cette proposition que l'on utilise pour prouver qu'une suite est négligeable devant une autre, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens !!!
b. Attention à l'hypothèse de départ, qui n'est pas « si v n'est pas la suite nulle ». Par exemple, la suite $(1 + (1-)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas la suite nulle, mais il n'existe pas de rang à partir duquel aucun terme de la suite n'est nul.

Proposition 17.3

Soient u, v, w, u' et v' des suites réelles.
i. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$, alors : $u_n = \circ(w_n)$.
ii. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v'_n)$, alors : $u_n u'_n = \circ(v_n v'_n)$.
iii. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v_n)$, alors : $u_n + u'_n = \circ(v_n)$.
iv. Si $u_n = \circ(v_n)$, alors : $u_n u'_n = \circ(v_n u'_n)$.

Proposition 17.4 ▶ Négligeabilités de référence

Soient a et b deux réels.

i. Si $a < b$, alors : $n^a = \circ(n^b)$.

ii. Si $b > 0$, alors : $(\ln n)^a = \circ(n^b)$.

iii. Si $b > 0$, alors : $n^a = \circ(\mathrm{e}^{bn})$.

iv. Si $|a| < |b|$, alors : $a^n = \circ(b^n)$.

v. $a^n = \circ(n!)$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate des croissances comparées. □

B. Suites équivalentes

Définition 17.5

Soient u et v deux suites réelles.
On dit que u est **équivalente** à v s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un rang p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = v_n\, h_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 17.1 Justifier que : $n^2 - n + 2 \sim n^2$.

Remarques

a. La relation $u_n \sim v_n$ se lit « u_n est équivalent à v_n ».

b. On peut remarquer que $u_n \sim v_n$ si et seulement si : $u_n = v_n + \circ(v_n)$.

c. De la définition, on déduit de manière immédiate la proposition suivante :

Proposition 17.6

Soient u et v deux suites réelles. Si u est équivalente à v, alors v est équivalente à u. Dans ce cas, on peut donc dire que les suites u et v sont équivalentes.

Théorème 17.7

Si $u_n \sim v_n$ et si ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Preuve Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 1$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

□

Remarques

a. Ce résultat est sans doute le plus important de ce paragraphe : pour déterminer la limite d'une suite, il suffit donc d'en chercher un équivalent simple.

b. Attention : l'équivalence de deux suites u et v permet donc de dire que les suites u et v ont le même comportement asymptotique (*i.e.* quand n tend vers $+\infty$) mais, contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, il serait dangeraux de dire que deux suites équivalentes sont à peu près égales. Par exemple, on peut vérifier que $n^2 + n \sim n^2$. Pourtant, quand n tend vers $+\infty$, il est difficile de prétendre que $n^2 + n$ est à peu près égal à n^2, puisque la différence tend vers $+\infty$.

c. Attention à ne pas dire que « deux suites équivalentes ont la même limite » sans préciser que l'une au moins des deux a une limite.
Par exemple, on peut vérifier que $(-1)^n(n+1) \sim (-1)^n n$, mais aucune de ces deux suites n'a de limite.

Théorème 17.8

Si ℓ est un réel **non nul** et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors : $u_n \sim \ell$.

Preuve Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors :

$$\exists p \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant p,\ u_n = \frac{u_n}{\ell} \times \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$$

et donc : $u_n \sim \ell$. □

Remarque Attention : il est fondamental de s'assurer que ℓ est un réel non nul pour dire qu'une suite tendant vers ℓ est équivalente à ℓ. En effet, compte tenu de la définition, si $u_n \sim 0$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = 0 \times h_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

Par conséquent, seules les suites stationnaires nulles sont équivalentes à la suite nulle.

Proposition 17.9

Soient u et v deux suites réelles.

$$u_n = \circ(v_n) \Rightarrow u_n + v_n \sim v_n$$

Preuve Si $u_n \sim (v_n)$, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$

et alors :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n + v_n = (1+\varepsilon_n)v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(1+\varepsilon_n) = 1$$

donc : $u_n + v_n \sim v_n$. □

Exercice 17.2 Déterminer un équivalent simple de $n^2 + \ln(n)$.

Proposition 17.10

Soient u et v deux suites réelles. Si les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Preuve

- Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

S'il existe un entier naturel q tel que les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant q}$ soient tous non nuls, alors, en notant $r = \max(p,q)$:

$$\forall n \geqslant r,\ \frac{u_n}{v_n} = h_n$$

et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

- Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, en notant q un entier tel que les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant q}$ soient tous non nuls, on peut définir une suite h en notant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < q \\ \dfrac{u_n}{v_n} & \text{si } n \geqslant q \end{cases}$$

et alors :

$$\forall n \geqslant q,\ u_n = h_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

donc : $u_n \sim v_n$.

□

Remarques

a. Attention : encore une fois, même si c'est le plus souvent cette proposition qui est utilisée pour démontrer que deux suites sont équivalentes, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens !!!

b. Attention à l'hypothèse de départ qui n'est pas « si v n'est pas la suite nulle ».

Proposition 17.11

Si u et v sont deux suites équivalentes, leurs termes sont de même signe à partir d'un certain rang.

Preuve Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

De plus, comme (h_n) converge vers 1 et $1 > 0$, il existe un entier $r \geqslant q$ tel que :

$$\forall n \geqslant r,\ h_n > 0$$

et alors, pour tout $n \geqslant r$, u_n et v_n sont de même signe. □

Proposition 17.12

Soient u, v, w, u' et v' des suites réelles.

i. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors : $u_n \sim w_n$.

ii. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors : $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

iii. Si $u_n \sim v_n$ et si les termes des suites u et v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.

Remarque Comme on l'a vu dans cette proposition, l'équivalence est compatible avec le produit et le quotient (lorsque celui-ci a un sens). En revanche, on ne peut pas sommer des équivalents. Par exemple, on peut voir que :

$$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

mais pourtant $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)}$ n'est pas équivalent à $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} = 0$.

Proposition 17.13

Si $u_n \sim v_n$, alors :

i. $\forall p \in \mathbb{N},\ u_n^p \sim v_n^p$,

ii. si les termes de la suite u sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors : $\forall p \in \mathbb{Z},\ u_n^p \sim v_n^p$,

iii. si u est strictement positive à partir d'un certain rang, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate des propriétés des fonctions puissances (dont la continuité en 1) et de B. □

Remarque Attention, s'il est possible de composer par une puissance (sous réserve que celle-ci ait un sens), il n'est en général pas possible de composer par une fonction quelconque, même avec des arguments de continuité. Par exemple :

$$\frac{n}{n+1} \sim 1$$

mais $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ n'est pas équivalent à $\ln(1) = 0$.

Proposition 17.14 ▶ Équivalents de référence

Soit u une suite convergeant vers 0.

i. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

ii. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

iv. $\sin(u_n) \sim u_n$.

v. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.

Preuve Ces équivalents découlent de manière immédiate des équivalents de référence sur les fonctions. □

Exercice 17.3 Déterminer la limite de la suite $u = (\sqrt{n^2 + n} - n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 17-1

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - n + 2 = n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 1$$

et donc :

$$n^2 - n + 2 \sim n^2$$

Correction de l'exercice 17-2

D'après 17.4, on a : $\ln(n) = \circ(n^2)$ et donc : $n^2 + \ln(n) \sim n^2$.

D. Pour aller plus loin

Preuve de la proposition 17.3

1. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$, il existe deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et deux entiers naturels p et q tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n u_n \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant q,\ v_n = \varepsilon'_n w_n$$

et alors :

$$\forall n \geqslant \max(p, q),\ u_n = (\varepsilon_n \varepsilon'_n) w_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_n \varepsilon'_n) = 0$$

ce qui prouve que : $u_n = \circ(w_n)$.

2. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v'_n)$, il existe deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et deux entiers naturels p et q tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n u_n \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant q,\ u'_n = \varepsilon'_n v'_n$$

et alors :

$$\forall n \geqslant \max(p, q),\ u_n v_n = (\varepsilon_n \varepsilon'_n) v_n v'_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_n \varepsilon'_n) = 0$$

ce qui prouve que : $u_n u'_n = \circ(v_n v'_n)$.

3. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v_n)$, il existe deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et deux entiers naturels p et q tels que :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n u_n \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant q,\ u'_n = \varepsilon'_n v_n$$
et alors :
$$\forall n \geqslant \max(p,q),\ u_n + u'_n = \varepsilon_n v_n + \varepsilon'_n v_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) v_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) = 0$$
ce qui prouve que : $u_n + u'_n = \circ(v_n)$.

4. Si $u_n = \circ(v_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et un entier naturel p tels que :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n u_n$$
et alors :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n u'_n = \varepsilon_n (v_n u'_n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$
ce qui prouve que : $u_n u'_n = \circ(v_n u'_n)$.

Preuve de la proposition 17.12

i. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, il existe deux suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et deux entiers naturels p et q tels que :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n = h_n v_n \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant q,\ v_n = h'_n w_n$$
et alors :
$$\forall n \geqslant \max(p,q),\ u_n = (h_n h'_n) w_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} (h_n h'_n) = 1$$
ce qui prouve que : $u_n \sim w_n$.

ii. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, il existe deux suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et deux entiers naturels p et q tels que :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n = h_n u_n \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant q,\ u'_n = h'_n v'_n$$
et alors :
$$\forall n \geqslant \max(p,q),\ u_n v_n = (h_n h'_n) v_n v'_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} (h_n h'_n) = 1$$
ce qui prouve que : $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

iii. Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :
$$\forall n \geqslant p,\ u_n = h_n v_n$$
Si de plus les termes des suites u et v sont tous non nuls à partir d'un certain rang q, alors les termes de la suite $(h_n)_{n\geqslant\max(p,q)}$ sont également tous non nuls et :
$$\forall n \geqslant \max(p,q),\ \frac{1}{u_n} = \frac{1}{h_n} \times \frac{1}{v_n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h_n} = 1$$
ce qui prouve que : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.

Sommaire