16 Suites de nombres réels

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

A. Généralités

A.1. Définition et opérations sur les suites réelles

Définition 16.1

On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Une telle suite est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où plus simplement (u_n), ou même u.
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarques

a. Si u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est de la forme $[\![p, +\infty[\![$ (où p est un entier naturel quelconque), on dit que u est une suite définie à partir d'un certain rang. u est aussi notée $(u_n)_{n\geqslant p}$.

b. Plus généralement, on appelle suite réelle toute application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque I est une partie finie de $\mathbb{N}$, on parle de *suite finie*. Une telle suite est en général notée $(u_n)_{n\in I}$. Toutes les définitions suivantes se généralisent aux suites définies à partir d'un certain rang.

c. Comme toutes les suites envisagées dans ce chapitre sont des suites réelles, on parlera plus simplement de suite pour parler de suite réelle.

Définition 16.2

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit :

i. **l'addition de deux suites réelles** u et v en définissant la suite $u+v$ par :

$$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ii. **la multiplication de deux suites réelles** u et v en définissant la suite $u \times v = u\,v$ par :

$$u\,v = (u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

iii. **la multiplication d'une suite réelle** u **par un réel** λ en définissant la suite $\lambda \cdot u = \lambda u$ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

A.2. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 16.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
Un tel réel M est alors appelé **majorant** de la suite u.

ii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
Un tel réel m est alors appelé **minorant** de la suite u.

iii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemples 16.1

a. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et majorée par 1 ; elle est donc bornée.

b. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par -1 et 1.

c. La suite $(n^2+n-2)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -2 mais n'est pas majorée ; elle n'est donc pas bornée.

d. La suite $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni minorée, ni majorée.

Remarque Un ensemble fini étant toujours borné, il est équivalent de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'il existe un entier naturel q tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant q}$ est bornée.

Théorème 16.4

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant M$$

Preuve

◇ Supposons que la suite u soit bornée. Il existe alors deux réels m et m' tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ m\leqslant u_n\leqslant m'$$

et alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant \max(|m|,|m'|)$$

ce qui donne la première implication en prenant $M=\max(|m|,|m'|)$.

◇ Réciproquement, supposons qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant M$$

On a alors immédiatement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ -M\leqslant u_n\leqslant M$$

ce qui prouve que la suite u est bornée, établissant ainsi la seconde implication.

□

A.3. Sens de variation d'une suite

Définition 16.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

i. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$,

ii. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leqslant u_n$,

iii. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante,

iv. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$,

v. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** s'il existe un entier p tel que : $\forall n\geqslant p,\ u_n=u_p$.

Méthode 16.6

Pour étudier la monotonie d'une suite u, on étudie le plus souvent le signe de $u_{n+1}-u_n$:

- si $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite u est croissante,
- si $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite u est décroissante.

Cependant, quand les termes de la suite u s'expriment sous forme de produit ou à l'aide de puissances, il est parfois intéressant, **si tous les termes de la suite sont strictement positifs**, de comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :

- si la suite u est strictement positive, elle est croissante si et seulement si : $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$,

- si la suite u est strictement positive, elle est décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Attention cependant à bien vérifier que les termes de la suite sont bien tous strictement positifs avant d'utiliser ce résultat. Le lecteur inquiet pourra se demander ce qu'il advient dans le cas d'une suite est strictement négative (en considérant, par exemple, le cas de la suite $(-n)_{n\mathbb{N}^*}$) ou encore d'une suite n'étant pas de signe constant (par exemple dans le cas de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 16.1 Étudier les variations de la suite $u = \left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

B. Exemples de suites réelles

Dans toute cette partie, p désigne un entier naturel.

B.1. Suites arithmétiques

Définition 16.7

Soit a un réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est une **suite arithmétique** de raison a si :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n + a.$$

Théorème 16.8

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$.

i. $\forall q \geqslant p,\ \forall n \geqslant q,\ u_n = u_q + (n-q)a$.

ii. $\forall q \geqslant p,\ \forall n \geqslant q,\ \displaystyle\sum_{k=q}^{n} u_k = \underbrace{(n-q+1)}_{\substack{\text{nb de termes}\\ \text{dans la somme}}} \times \underbrace{\frac{u_q+u_n}{2}}_{\substack{\text{valeur moyenne}\\ \text{des termes}}} = (n-q+1)u_q + \frac{(n-q)(n-q+1)}{2}a$.

Exemple 16.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+4}(2k+3)$. Si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n+3$, on peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2n+5 = u_n + 2$$

La suite u est donc une suite arithmétique de raison 2 et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n+4}(2k+3) &= (n+2) \times \frac{[2\times 3+3]+[2\times(n+4)+3]}{2}\\ &= (n+2)(n+10)\end{aligned}$$

Exercice 16.2 Démontrer le théorème 16.8.

B.2. Suites géométriques

Définition 16.9

Soit q un réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est une **suite géométrique** de raison q si :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = q \times u_n$$

Théorème 16.10

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

i. $\forall m \geqslant p,\ \forall n \geqslant m,\ u_n = q^{n-m}\, u_m$.

ii. $\forall m \geqslant p,\ \forall n \geqslant m,\ \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_m - u_{n+1}}{1-q} = u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-m+1)u_m & \text{si } q = 1 \end{cases}.$

Exemple 16.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+5} 2^k$. Si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$, on peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$$

La suite u est donc une suite géométrique de raison $2 \neq 1$ et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n+5} 2^k &= 2^3 \times \frac{1-2^{n+3}}{1-2} \\ &= 2^{n+6} - 8\end{aligned}$$

Exercice 16.3 Démontrer le théorème 16.10.

B.3. Suites arithmético-géométriques

Définition 16.11

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque Il arrive parfois que l'on ne parle de suite arithmético-géométrique que dans les cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$. En effet, si $a = 1$, on reconnaît l'expression d'une suite arithmétique (de raison b) tandis que, si $b = 0$, on reconnaît l'expression d'une suite géométrique (de raison a).

Théorème 16.12

Soit (a, b) un couple de réels tel que $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ est une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = au_n + b$$

L'équation $x = ax + b$, d'inconnue x réelle, admet une unique solution $c = \frac{b}{1-a}$ et la suite $(u_n - c)_{n\geqslant q}$ est géométrique de raison a ; par conséquent on a : , pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = au_n + b$, alors :

$$\forall q \geqslant p,\ \forall n \geqslant q,\ u_n - c = a^{n-q}(u_q - c)$$

Preuve On fixe un entier q supérieur ou égal à p. On remarque déjà que, comme a est différent de 1, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x = ax + b &\iff (1-a)x = b \\ &\iff x = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

donc l'équation $x = ax + b$ admet bien une unique solution c et l'on a alors :

$$\forall n \geqslant q, \ \begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b \\ c & = ac + b \end{cases}$$

et en effectuant la différence de ces deux lignes :

$$\forall n \geqslant q, \ u_{n+1} - c = a(u_n - c)$$

Ainsi, la suite $(u_n - c)_{n \geqslant q}$ est une suite géométrique de raison a, ce qui prouve le résultat attendu avec 16.10. □

Exercice 16.4 Déterminer une expression de u_n en fonction de n dans le cas où $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - 2$$

B.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 16.13

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant p}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \geqslant p, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Dans ce cas, l'équation $x^2 = ax + b$, d'inconnue x réelle, est appelée **équation caractéristique** de la suite u.

Remarques

a. Si $b = 0$, une telle suite est une suite géométrique.

b. Si $a = 0$, les suites $(u_{2n})_{n \geqslant \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ sont des suites géométriques de raison b.

c. Attention à cette définition : les réels a et b doivent être indépendants de n. Par exemple, une suite u telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n$ n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Théorème 16.14

Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\forall n \geqslant p, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Si on note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E) : $x^2 - ax - b = 0$, alors :

i. Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geqslant p, \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

ii. Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle r et il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geqslant p, \ u_n = (\lambda + n\mu)\, r^n$$

Preuve Pour simplifier, on suppose que $b \neq 0$ (seul cas réellement intéressant puisque, si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.

i. Commençons par considérer le système suivant, d'inconnues λ et μ réelles :

$$(S) : \begin{cases} u_p = \lambda + \mu \\ u_{p+1} = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$$

On remarque que le déterminant (voir chapitre 7. Systèmes linéaires) de ce système est égal à $r_2 - r_1$. Comme $r_1 \neq r_2$, ce déterminant n'est pas nul, donc (S) admet un unique couple solution (λ, μ). Ce couple étant fixé, montrons alors par récurrence que, pour tout $n \geqslant p$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ » est vraie.

◇ Par définition de λ et μ, $\mathscr{P}(p)$ et $(p+1)$ sont vraies.

◇ Soit $n \geqslant p$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Par définition de la suite u, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a\left(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}\right) + b\left(\lambda r_1^n + \mu r_2^n\right) \\ &= \lambda r_1^n\left(ar_1 + b\right) + \mu r_2\left(ar_2 + b\right) \end{aligned}$$

Or, par définition de r_1 et r_2, on a :

$$\forall i \in \{1, 2\},\ r_i^2 - ar_i - b = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, 2\},\ ar_i + b = r_i^2$$

et donc :

$$u_{n+2} = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}$$

donc finalement : $\mathscr{P}(n) \cap \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$.

◇ On peut finalement conclure :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

ii. Démonstration analogue à la précédente.

□

Remarques **a.** Pour trouver λ et μ, il suffit de connaître deux termes de la suite u (en général u_0 et u_1) et de résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

b. Il existe une preuve alternative de ce théorème, utilisant l'algèbre linéaire. Le principe général de cette démonstration est de :

- prouver que l'ensemble $S_{a,b} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un espace vectoriel de dimension 2,
- montrer que la famille (v, w) est une famille libre de deux vecteurs de $S_{a,b}$, avec :

  — $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = r_1^n$ et $w_n = r_2^n$ si (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2,

  — $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = r^n$ et $w_n = nr^n$ si (E) admet une unique solution réelle r.

  Cette méthode s'applique d'ailleurs plus généralement à toutes les suites réelles vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+r} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots a_{r-1} u_{n+r-1}$. Le lecteur intéressé trouvera des exemples de telles situations dans les chapitres 8. Espaces Vectoriels et 10. Applications linéaires.
- Le couple (λ, μ) évoqué dans ce théorème est unique. Cependant, on est le plus souvent amené à le déterminer, donc savoir qu'il est unique est rarement utile.

Exercice 16.5 1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

2. Même question dans le cas où la suite u est définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

C. Limite d'une suite réelle

C.1. Limite d'une suite

Définition 16.15

Soit ℓ un réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet pour limite** ℓ (ou tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, ou encore **converge** vers ℓ) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $\lim u = \ell$.

Remarques

a. Autrement dit, la suite u converge vers ℓ si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite u sont aussi proches de ℓ que l'on veut.

b. Compte tenu de la définition, il est équivalent de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ et que la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En particulier, pour prouver que la suite u converge vers ℓ, il suffit donc de prouver que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c. Attention, si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on ne peut en général pas dire que la suite u converge, ni vers ℓ, ni vers $-\ell$. Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(|u_n|)$ est constante égale à 2, donc converge vers 2, mais la suite u ne converge pas.

d. Il est important de comprendre que, dans cette définition, le plus important est de pouvoir majorer la distance $|u_n - \ell|$ quand n est grand par n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il. Le lecteur comprendra ainsi que les affirmations suivantes sont équivalentes :

i. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$

ii. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

iii. $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$

iv. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < 2\varepsilon$

v. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < k\varepsilon$ (k étant un réel positif quelconque indépendant de n).

Définition 16.16

i. On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A$$

Dans ce cas, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ou encore $\lim u = +\infty$.

ii. On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, B[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < B$$

Dans ce cas, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, ou encore $\lim u = -\infty$.

Remarques

a. Le lecteur remarquera sans doute que, dans la définition d'une suite tendant vers $+\infty$, on peut se limiter aux valeurs positives de A ou encore aux valeurs de A supérieures à un réel fixé. De même, dans la définition d'une suite tendant vers $-\infty$, on peut se limiter aux valeurs de B inférieures à un réel fixé quelconque.

b. Attention, une suite peut donc admettre une limite sans être convergente. On dit qu'une suite admet une limite si elle converge (donc tend vers une limite finie) ou si elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 16.17

On dit que :

i. la suite u **converge** (ou est convergente) s'il existe un réel ℓ tel que u converge vers ℓ,

ii. la suite u **diverge** (ou est divergente) si elle ne converge pas, c'est-à-dire si elle admet une limite infinie ou pas de limite (on parle dans ce dernier cas de divergence de seconde espèce).

Remarque Attention, une suite divergente peut ne pas avoir de limite. C'est le cas par exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme on le verra plus loin.

Théorème 16.18

Si une suite u admet une limite, celle-ci est unique.

Preuve

◇ Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites finies ℓ et ℓ'. Par définition, on a alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n'_\varepsilon,\ |u_n - \ell'| < \varepsilon$$

Posons alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$. On a donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |\ell - \ell'| &= |\ell - u_n + u_n - \ell'| \\ &\leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \\ &\leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout réel ε strictement positif, on a donc : $|\ell - \ell'| = 0$, d'où : $\ell = \ell'$.

◇ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. On a alors :

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists n_\ell \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\ell,\ u_n > \ell + 1$$

ce qui suffit pour affirmer que u ne peut tendre ni vers un réel ℓ, ni vers $-\infty$.

◇ On montre de même qu'une suite ne peut tendre vers $-\infty$ et avoir une autre limite ℓ, réelle ou égale à $+\infty$.

□

C.2. Quelques limites de référence

Théorème 16.19

Si α est un réel quelconque, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Preuve

- On suppose que : $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{\alpha}}$ est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ (n^\alpha > A \Longleftrightarrow n > A^{\frac{1}{\alpha}})$$

et donc, en notant $n_A = \left\lfloor A^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_A \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_A,\ n^\alpha > A$$

ce qui prouve que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$.

- Si $\alpha = 0$, la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, donc converge vers 1.

- On suppose que : $\alpha < 0$. La fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{\alpha}}$ est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ (n^\alpha < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})$$

et donc, en notant $n_\varepsilon = \left\lfloor \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor + 1$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ n^\alpha < \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |n^\alpha| < \varepsilon$$

ce qui prouve que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.

□

Théorème 16.20

Si q est un réel quelconque, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite si et seulement si $q > -1$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

Preuve

- On suppose que : $q > 1$. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ q^n > A \Longleftrightarrow n\ln(q) > \ln(A)$$

et donc, comme $\ln(q) > 0$ (car $q > 1$) :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ q^n > A \Longleftrightarrow n > \frac{\ln(A)}{\ln(q)}$$

Ainsi, on a, en notant $n_A = \left\lfloor \dfrac{\ln(A)}{\ln(q)} \right\rfloor + 1$ si $A \geqslant 1$ et $n_A = 0$ sinon :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_A \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_A,\ q^n > A$$

ce qui prouve que : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

- Si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, donc converge vers 1.

- Si $q = 0$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang 1, donc converge vers 0.

- Supposons que : $q \in]-1, 1[$ et $q \neq 0$. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(q)$ étant strictement négatif, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |q^n| < \varepsilon &\Longleftrightarrow n\ln|q| < \ln(\varepsilon) \\ &\Longleftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \end{aligned}$$

et donc, en posant $n_\varepsilon = 0$ si $\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \leqslant 0$ et $n_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \right\rfloor + 1$ sinon :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |q^n| < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $q \in]-1, 1[$.

◇ On suppose maintenant que : $q \leqslant -1$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} q^{2n} \geqslant 1 \\ q^{2n+1} \leqslant -1 \end{cases} \tag{16.1}$$

Ainsi, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut tendre ni vers $+\infty$ (il n'existe pas de rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 1), ni vers $-\infty$ (il n'existe pas de rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à -1).
Supposons alors que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |q^n - \ell| < \varepsilon$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ q^n - \varepsilon < \ell < q^n + \varepsilon$$

En prenant $\varepsilon = 1$, on en déduit :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_1,\ q^n - 1 < \ell < q^n + 1$$

et donc, en particulier :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_1,\ q^{2n} - 1 < \ell < q^{2n+1} + 1$$

et d'après (16.1) :

$$0 < \ell < 0$$

ce qui est légèrement problématique, nous permettant de conclure que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite si $q \leqslant -1$.

□

C.3. Propriétés des suites convergentes

Théorème 16.21

Toute suite convergente est bornée.

Preuve Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Il existe alors un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p+1,\ \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

Par ailleurs, l'ensemble $\{u_n, n \in [\![0,p]\!]\}$ est fini, donc admet un minimum a et un maximum b, et :

$$\forall n \in [\![0,p]\!],\ a \leqslant u_n \leqslant b$$

Finalement, en prenant $m = \min(a, \ell - 1)$ et $M = \max(b, \ell + 1)$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

donc la suite u est bornée. □

Remarque Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

Proposition 16.22

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (suites extraites des termes d'indices pairs d'une part, impairs d'autre part) convergent vers ℓ.

Preuve

◇ Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On a alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, comme $2n \geqslant n$ et $2n+1 \geqslant n$ pour tout entier naturel n, on a donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \begin{cases} |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers ℓ.

◇ Réciproquement, supposons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers le même réel ℓ. On a donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_{\varepsilon,1},\ |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_{\varepsilon,2}\ |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et alors, en posant $n_\varepsilon = \max(2n_{\varepsilon,1}, 2n_{\varepsilon,2}+1)$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

□

Remarques

a. Attention, il est fondamental que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la **même** limite pour pouvoir affirmer que la suite u converge. Penser au cas de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$...

b. Ce résultat est particulièrement intéressant pour prouver qu'une suite est divergente. Il suffit alors de prouver que l'une des deux suites extraites des termes d'indices pairs ou impairs est divergente ou que ces deux suites n'ont pas la même limite pour conclure que la suite u diverge.

Exercice 16.6 Étudier la nature de la suite $u = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 16.23

Si u est une suite convergeant vers un réel ℓ non nul, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont non nuls.

Preuve

On traite le cas où ℓ est strictement positif, le cas où ℓ est strictement négatif se traite de manière analogue. Comme u converge vers ℓ, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

et donc, en prenant $\varepsilon = \ell$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ 0 < u_n$$

□

Remarque En conséquence immédiate de la définition, si la suite u diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, on peut également dire que tous les termes de la suite u sont non nuls à partir d'un certain rang.

C.4. Limites et opérations algébriques

Proposition 16.24

Si u est une suite bornée et si v est une suite convergeant vers 0, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Preuve Comme la suite u est bornée, il existe un réel M strictement positif tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n v_n| \leqslant M\,|v_n|\,.$$

De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, la définition de la limite nous permet d'écrire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

et alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$$

et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$. □

Exercice 16.7

1. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{\cos(n)}{2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 16.25

Soient u et v deux suites réelles ainsi que a et b deux réels. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, alors :

i. Si λ est un réel, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λa :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n$$

ii. la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|a|$:

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right|$$

iii. la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a + b$:

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

iv. la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ab :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n$$

v. si $b \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{a}{b}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$$

vi. *si $b = 0^+$ (i.e. si v est strictement positive à partir d'un certain rang et converge vers 0) et si $a > 0$, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$$

Remarques **a.** Pour la limite d'un quotient de suites convergentes, il suffit que le dénominateur ait une limite finie non nulle pour que l'égalité $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ ait un sens puisque, si $b \neq 0$, on a déjà vu que les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang.

b. Dans le cas où $a = b = 0$ on ne peut rien dire en général quant à la limite éventuelle de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, même dans le cas où elle est bien définie à partir d'un certain rang. On parle de forme indéterminée.

Théorème 16.26

Soient u et v deux suites réelles.

i. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$,

ii. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$,

iii. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$,

iv. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

Preuve On démontre ici le deuxième point, laissant au lecteur le soin de s'en inspirer pour démontrer les autres. On suppose donc que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$. La suite v étant convergente, elle est bornée et admet donc un minorant m. De plus, par définition, on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_A,\ u_n > A - m$$

et alors :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_A,\ u_n + v_n > A$$

ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. □

Remarque Attention, on ne peut rien dire *a priori* pour $u + v$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée. Dans ce cas, pour déterminer la limite, on pourra essayer de factoriser ppur se ramener à une expression plus simple ou bien, comme on le verra plus tard, chercher un équivalent.

Théorème 16.27

Soient u et v deux suites réelles.

i. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \{-\infty, +\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,

ii. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$,

iii. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Remarques **a.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, on ne peut en général rien dire quant à la limite éventuelle de la suite $(u_n v_n)$. Il s'agit d'une forme indéterminée.

b. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, on ne peut rien dire de la limite éventuelle de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$. Il s'agit d'une forme indéterminée.

Exemple 16.4 Pour déterminer la limite de la suite $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$, on peut commencer par utiliser l'expression conjuguée (classique lorsqu'il y a des différences de racines) pour remarquer que :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=+\infty$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

C.5. Ordre et limite de suites

Théorème 16.28 ▶ Théorème de l'encadrement

Soient u, v et w trois suites réelles telles qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n\geqslant p,\ u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$$

Si les suites u et w convergent vers la même limite ℓ, alors la suite v converge également vers ℓ.

Preuve Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\ell$, on a, par définition de la limite :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,1}\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\geqslant n_{\varepsilon,1},\ \ell-\varepsilon\leqslant u_n\leqslant\ell+\varepsilon$$

et :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_{\varepsilon,2}\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\geqslant n_{\varepsilon,2},\ \ell-\varepsilon\leqslant w_n\leqslant\ell+\varepsilon$$

et alors, en posant $n_\varepsilon=\max(p,n_{\varepsilon,1},n_{\varepsilon,2})$:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\geqslant n_\varepsilon,\ \ell-\varepsilon\leqslant v_n\leqslant\ell+\varepsilon$$

et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$. □

Exercice 16.8

1. Déterminer la limite de la suite u définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{n+\cos(n)}{n^2}$$

2. Déterminer la limite de la suite u définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{n+(-1)^n}{n^2}$$

3. Soit x un réel quelconque. En encadrant $\lfloor nx\rfloor$ pour tout entier naturel n non nul, prouver qu'il existe une suite de nombres rationnels convergeant vers x.

Remarques

a. En particulier, pour montrer qu'une suite u converge vers 0, il suffit de trouver une suite v convergeant vers 0 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n\geqslant p,\ |u_n|\leqslant|v_n|$$

b. Attention à ne pas écrire une inégalité du type $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ tant que la convergence des trois suites u, v et w n'a pas été prouvée : ce théorème est intéressant en particulier parce qu'il permet de prouver la convergence de la suite encadrée tout en trouvant sa limite.

Théorème 16.29 ▶ Théorème de prolongement des inégalités

Soient u et v deux suites réelles telles qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n \leqslant v_n$$

i. si les suites u et v convergent, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$,

ii. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,

iii. si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve

◇ Supposons que les suites u et v convergent et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) > 0$$

D'après le raisonnement de 16.23, on en déduit qu'il existe un rang à partir duquel les termes de la suite $u - v$ sont strictement positifs, ce qui est absurde, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

◇ Supposons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On a alors :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_A \geqslant p \ / \ \forall n \geqslant n_A,\ u_n > A$$

et alors :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_A,\ v_n > A$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

◇ Se démontre comme le point précédent.

□

Remarques

a. Attention, ce théorème garantit la conservation des inégalités larges par passage à la limite, mais pas des inégalités strictes. Ainsi, si on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et si les suites u et v convergent, on a encore : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Pour se convaincre de l'utilité de ce passage d'une inégalité stricte à une inégalité large, le lecteur pourra se demander quelle est la limite de la suite strictement positive $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En particulier, on déduit de ce théorème que si la suite u converge vers une limite ℓ et si tous ses termes appartiennent à un intervalle fermé I (*i.e.* un intervalle de la forme $]-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$), alors ℓ appartient encore à I.

Exercice 16.9 Déterminer la limite de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

Proposition 16.30

Soient a et b deux réels et u une suite réelle convergeant vers un réel ℓ tel que : $a < \ell < b$. Il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ a < u_n < b$$

Preuve Par définition, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

et alors, en prenant $\varepsilon = \min\{\ell - a, b - \ell\}$:

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ a \leqslant \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \leqslant b$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Remarque Il est fondamental dans cette proposition d'avoir une inégalité stricte $a < \ell < b$ pour pouvoir encadrer les termes de la suite u. Par exemple, la suite $\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$ et, bien que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, aucun terme de cette suite n'appartient à $[0,1]$.

Exercice 16.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont non nuls et ℓ un réel appartenant à $]-1,1[$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

1. Justifier l'existence de réels q pour lesquels il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ |u_{n+1}| \leqslant q\,|u_n|$$

2. En choisissant q judicieusement, en déduire que la suite u converge vers 0.

Remarque Ce résultat est connu sous le nom de règle de d'Alembert, mais ne fait pas partie du programme. On peut cependant en déduire le résultat fondamental suivant :

Théorème 16.31

Pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{x^n}{n!}$$

Le résultat est immédiat si $x = 0$ (les termes sont alors tous nuls à partir du rang 1). On suppose donc que $x \neq 0$ et on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

D'après l'exemple précédent, on peut conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$. □

C.6. Limite d'une suite définie par une relation de récurrence simple

Théorème 16.32

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et a un élément de I.
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème 16.33

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I et f une fonction définie sur I.
Si u admet une limite ℓ (finie ou infinie) et si f admet une limite a (finie ou infinie) en ℓ, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a en $+\infty$.

Preuve La démonstration est analogue à la précédente si ℓ et a sont réels. Les autres cas (où l'une des deux limites au moins est infinie) se démontrent de manière analogue, en appliquant les définitions. Nous en laissons le soin au lecteur. □

Exercice 16.11 Déterminer la limite de $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 16.34 ▶ Théorème du point fixe

Soient I un intervalle **fermé** de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction **continue** sur I telle que I soit stable par f (i.e. telle que $f(I) \subset I$).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par son premier terme $u_0 = a$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite u converge, alors sa limite ℓ est un point fixe de f, appartenant à I, c'est-à-dire tel que : $\ell = f(\ell)$.

Preuve Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Remarquons tout d'abord que, comme I est stable par f et comme $u_0 = a$ appartient à I, on peut montrer par récurrence que tous les termes de la suite u sont bien définis et appartiennent à I. Dès lors, comme I est un intervalle fermé (*i.e.* de la forme $]-\infty, m]$, $[m, m']$ ou $[m, +\infty[$), le théorème de prolongement des inégalités 16.29 nous permet d'affirmer que ℓ appartient à I. Comme f est continue sur I, on a donc, d'après 16.33 :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$$

et finalement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\ell = f(\ell)$$

□

Remarques

a. Attention : ce théorème ne garantit pas la convergence de la suite u, mais permet souvent de simplifier l'étude de la nature d'une suite définie par une telle relation de récurrence. En revanche, si f n'admet pas de point fixe sur I, il permet d'affirmer que la suite u diverge.

b. Attention à ne pas oublier les hypothèses de stabilité de I par f et de continuité de f, trop souvent négligés au profit du fameux $\ell = f(\ell)$.

C.7. Théorème de la limite monotone

Théorème 16.35 ▶ Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle monotone admet une limite, finie ou infinie.
Plus précisément, si u est une suite réelle, alors :

i. si u est croissante et majorée, elle converge,

ii. si u est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$,

iii. si u est décroissante et minorée, elle converge,

iv. si u est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Exercice 16.12 Étudier la nature de la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$$

C.8. Croissances comparées

Théorème 16.36

Soit a, b et q trois réels quelconques.

i. Si $b > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^a}{n^b} = 0$.

ii. Si $b > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{\mathrm{e}^{bn}} = 0$.

iii. Si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$.

iv. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate des croissances comparées usuelles sur les fonctions (voir chapitre 16). □

D. Suites adjacentes

Définition 16.37

Deux suites u et v sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 16.38

Si les suites u et v sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite ℓ et celle-ci vérifie, si u est croissante et v décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Exercice 16.13 On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite.

Remarque Attention à ne pas oublier d'étudier la monotonie des suites u et v avant de conclure. En effet, on ne peut rien dire des suites u et v à partir de la seule information $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Nous invitons le lecteur suspicieux à calculer la limite de $v - u$ et à étudier la convergence des suites u et v dans les cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{n}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 16.14 On se propose de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires : « si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a et b deux deux éléments de I, alors, pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel x compris entre a et b tel que : $f(c) = d$ ».

À cet effet, on considère une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on considère deux éléments a et b de I. Pour simplifier le raisonnement, on suppose que $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se démontre de manière analogue et le cas $f(a) = f(b)$ ne nécessite pas réellement de preuve, non ?).

Soit alors d un élément de $[f(a), f(b)]$. On considère les suites u et v définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(u_n, \dfrac{u_n + v_n}{2}\right) & \text{si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) > d \\ \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}, v_n\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que les termes des suites u et v sont tous bien définis, appartiennent à I et que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$$
2. Prouver que les suites u et v convergent vers une même limite c.
3. Conclure.

Remarque Les suites u et v ont été construites par **dichotomie**. Il est important de bien retenir et comprendre le raisonnement précédent, qui s'avérera utile, notamment en informatique.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 16-1

On constate que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$
On peut donc écrire :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1) \times (n+1)^n}{(n+1) \times n!} \times \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\end{aligned}$$
Or on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n} \geqslant 1 \geqslant 0$$
et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
Comme $u_0 = u_1 = 1$, on a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
Comme les termes de la suite u sont tous positifs, on en déduit que la suite u est croissante.

Correction de l'exercice 16-2

i. On fixe un entier naturel q supérieur ou égal à p et on procède par récurrence, en notant, pour tout $n \geqslant q$, $\mathscr{H}(n)$ la proposition : « $u_n = u_q + (n-q)a$ ».

◇ Pour $n = q$, on a :
$$u_q + (q-q)a = u_q$$
donc $\mathscr{H}(q)$ est vraie.

◇ Soit $n \geqslant q$. Supposons que $\mathscr{H}(n)$ soit vraie. Par définition de la suite u, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + a \\ &= u_q + (n-q)a + a \\ &= u_q + (n+1-q)a \end{aligned}$$

et donc : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant q$, ce qui prouve le résultat annoncé.

ii. D'après le résultat précédent, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall q \geqslant p,\ \forall n \geqslant q,\ \sum_{k=q}^{n} u_k &= \sum_{k=q}^{n} [u_q + (k-q)a] \\ &= \sum_{k=q}^{n} u_q + a \sum_{k=q}^{n} (k-q) \end{aligned}$$

et donc, la première somme comportant $n-q+1$ termes égaux et en effectuant le changement d'indice $k := k-q$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned} \forall q \geqslant p,\ \forall n \geqslant q,\ \sum_{k=q}^{n} u_k &= (n-q+1)u_q + a \sum_{k=0}^{n-q} k \\ &= (n-q+1)u_q + a \times \frac{(n-q)(n-q+1)}{2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on constate que :

$$\begin{aligned} (n-q+1) \times \frac{u_q + u_n}{2} &= (n-q+1) \times \frac{2u_q + (n-q)a}{2} \\ &= (n-q+1)u_q + a \times \frac{(n-q)(n-q+1)}{2} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité annoncée.

Correction de l'exercice 16-3

i. On fixe un entier naturel m supérieur ou égal à p et on procède par récurrence, en notant, pour tout $n \geqslant m$, $\mathscr{H}(n)$ la proposition : « $u_n = q^{n-m} u_m$ ».

◇ Pour $n = m$, on a :

$$q^{m-m} u_m = u_m$$

donc $\mathscr{H}(m)$ est vraie.

◇ Soit $n \geqslant m$. Supposons que $\mathscr{H}(m)$ soit vraie. Par définition de la suite u, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= q u_n \\ &= q \times q^{n-m} u_m \\ &= q^{n+1-m} u_m \end{aligned}$$

et donc : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant m$, ce qui prouve le résultat annoncé.

ii. On fixe un entier naturel m supérieur ou égal à p.

► Si $q = 1$, on a directement, tous les termes de la somme étant égaux à u_m (une suite géométrique de raison 1 est une suite constante) :

$$\forall m \geqslant p,\ \forall n \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m$$

► Si $q \neq 1$, on procède par récurrence, en notant $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q}$ ».

◇ Pour $n = m$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_m - u_{m+1}}{1-q} &= \frac{u_m - qu_m}{1-q} \\ &= u_m \\ &= \sum_{k=m}^{m} u_k\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(m)$ est vraie.

◇ Soit $n \geqslant m$. Supposons que $\mathscr{P}(m)$ soit vraie. Par définition de la suite u, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n+1} u_k &= \sum_{k=m}^{n} u_k + u_{n+1} \\ &= \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q} + u_{n+1} \\ &= \frac{u_m - qu_{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{u_m - u_{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

et donc : $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geqslant m$. Enfin, on peut remarquer que :

$$\forall n \geqslant m,\ \frac{u_m - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_m - q^{n+1-m}u_m}{1-q} = u_m \times \frac{1-q^{n+1-m}}{1-q}$$

ce qui prouve les égalités attendues.

Correction de l'exercice 16-4

La suite u est une suite arithmético-géométrique et on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}x = \frac{x}{3} - 2 &\iff 3x = x - 6 \\ &\iff x = -3\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n - (-3))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3^n}(u_0+3) - 3 = \frac{7}{3^n} - 3}$$

Correction de l'exercice 16-5

1. La suite u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et son équation caractéristique (E) est : $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation admet pour discriminant $\Delta = 5 > 0$, donc elle admet deux solutions réelles distinctes, qui sont :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il existe donc un couple (λ, μ) de réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On a alors, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$:

$$\begin{cases}\lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1\end{cases}.$$

On résout maintenant ce système :

$$\begin{cases}\lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda = -\mu \\ \mu(r_2 - r_1) = 1\end{cases}$$

et donc, comme $r_2 - r_1 \neq 0$:

$$\mu = \frac{1}{r_2 - r_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \lambda = -\frac{1}{r_2 - r_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2. La suite u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

$$(E) : x^2 - 4x + 4 = 0$$

(E) admet une unique solution, qui est 2, donc il existe un couple (λ, μ) de réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu)\, 2^n$$

On a alors, comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\mu = 0 \end{cases}$$

Ainsi $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$$

Correction de l'exercice 16-6

On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

Ainsi, la suite (u_{2n}) converge vers 0, mais la suite (u_{2n+1}) diverge (cf. 16.20), donc la suite u diverge.

Correction de l'exercice 16-7

1. La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2} = 0$$

2. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} = 0$$

Correction de l'exercice 16-8

1. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant n - 1 \leqslant n + \cos(n) \leqslant n + 1 \leqslant 2n$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, on en déduit, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

2. On remarque que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1 \leqslant 2n$$
et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, on en déduit, d'après le théorème de l'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3. On remarque que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$
et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$
De plus, oin a :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(x - \frac{1}{n} \right) = x$$
et donc, d'après le théorème de l'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$
Comme la suite $\left(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est formée de nombres rationnels, cela prouve le résultat annoncé.

Correction de l'exercice 16-9

On a :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n &\geqslant \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &\geqslant n\end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit, d'après le théorème de prolongement des inégalités :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Correction de l'exercice 16-10

1. Par hypothèse, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |\ell|$$
donc, par définition de la limite :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant p,\ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leqslant |\ell| + \varepsilon$$
et alors :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant p,\ |u_{n+1}| \leqslant (|\ell| + \varepsilon)\,|u_n|$$
En notant $q = |\ell| + \varepsilon$, on en déduit :
$$\forall q > |\ell|\,,\ \exists p \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant p,\ |u_{n+1}| \leqslant q\,|u_n|$$

2. En choisissant q tel que $|\ell| < q < 1$, on en déduit, d'après 16.30, qu'il existe un entier naturel p tel que :
$$\forall n \geqslant p,\ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leqslant q$$
et donc :
$$\forall n \geqslant p,\ |u_{n+1}| \leqslant q\,|u_n|$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall n \geqslant p,\ |u_n| \leqslant q^{n-p} |u_p|.$$

De plus, comme p appartient à $[0,1[$, on a, d'après 16.20 :

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n-p} |u_p| = 0$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

ce qui suffit pour conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction de l'exercice 16-11

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n+1}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$, on a donc, d'après 16.27 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+3} = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$$

Finalement, comme la fonction ln est continue en 2, on peut conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right) = \ln(2)$$

Correction de l'exercice 16-12

On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2} \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite u est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle admet une limite ℓ en $+\infty$, et que cette limite est finie si u est majorée et égale à $+\infty$ sinon.
Par ailleurs, on remarque que la suite u est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle fermé). Par conséquent, d'après le théorème du point fixe 16.34, si la suite u converge vers ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$.
Or on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}x = f(x) &\iff x = \frac{x^2+1}{2} \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

Par conséquent, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 (ce qui, compte tenu de la remarque initiale) se produit si et seulement si la suite u est majorée.
Montrons alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ » est vraie.

- ◇ Pour $n = 0$. Comme $u_0 = 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors :

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$

  c'est-à-dire :

  $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

  donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite u est majorée. Étant croissante, elle est donc convergente et d'après les remarques précédentes, on en déduit finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Correction de l'exercice 16-13

On prouve que les suites u et v sont adjacentes.

◇ On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

◇ De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+2) - \ln(n+1)]$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]k, k+1[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]k, k+1[,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln'(x) \leqslant \frac{1}{k}$$

et alors, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Ainsi, la suite u est décroissante et la suite v est croissante.

◇ Finalement, les suites u et v sont donc adjacentes, donc convergent vers une même limite γ.

N.B. Le lecteur curieux notera avec intérêt que cette limite γ est la constante d'Euler :

$$\gamma \simeq 0,5772$$

Correction de l'exercice 16-14

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « u_n et v_n existent, appartiennent à I et vérifient : $u_n \leqslant v_n$ » est vraie.
   ◇ Pour $n = 0$. Comme $u_0 = a$ et $v_0 = b$ appartiennent à I et vérifient $a \leqslant b$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Comme I est un intervalle et comme u_n et v_n appartiennent à I, $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ existe et appartient à I. Par conséquent, $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)$ existe. On en déduit que, dans les deux cas de figure, u_{n+1} et v_{n+1} sont bien définis et appartiennent à I. Deux cas se présentent alors :
   — Si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) > d$. Dans ce cas, on a :

$$u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

et donc, comme $u_n + v_n \geqslant 2u_n$ d'après $\mathscr{P}(n)$:

$$u_{n+1} \leqslant v_{n+1}.$$

— Si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \leqslant d$. Dans ce cas, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n$$

et donc, comme $u_n + v_n \leqslant 2v_n$ d'après $\mathscr{P}(n)$:

$$u_{n+1} \leqslant v_{n+1}.$$

Dans tous les cas, on a donc prouvé : $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Ainsi, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les termes des suites } u \text{ et } v \text{ sont tous bien définis, appartiennent à } I \text{ et :}\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n.\end{array}}$$

2. On prouve que les suites u et v sont adjacentes.

◇ On commence par remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \begin{cases} u_n - u_n = 0 & \text{si } f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) > d \\ \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \begin{cases} \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n-v_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) > d \\ v_n - v_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \leqslant 0.$$

Ainsi, la suite u est croissante et la suite v est décroissante.

◇ Par ailleurs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) > d \\ v_n - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc, plus simplement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n-u_n}{2}.$$

Ainsi, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = \frac{v_0-u_0}{2^n}$$

et donc, comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Finalement, les suites u et v sont adjacentes, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Les suites } u \text{ et } v \text{ convergent vers une même limite } c}$$

3. Par construction, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leqslant d \leqslant f(v_n)$$
et de plus, comme f est continue en c (car c appartient à I) :
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(c),$$
et finalement, d'après le théorème de prolongement des inégalités : $f(c) \leqslant d \leqslant f(c)$, soit encore :
$$f(c) = d.$$
On peut finalement conclure :
$$\boxed{\text{Tout réel compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \text{ admet au moins un antécédent par } f}$$

F. Pour aller plus loin

Preuve du théorème 16.25

i. Le résultat est immédiat si $\lambda = 0$, car alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante nulle donc converge vers 0. On suppose maintenant que λ n'est pas nul. Comme $|\lambda| > 0$, on a alors :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$
et donc :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |\lambda u_n - \lambda\ell| \leqslant \varepsilon$$
d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.

ii. D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n| - |a|| \leqslant |u_n - a|$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on en déduit :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ ||u_n| - |a|| \leqslant |u_n - a| \leqslant \varepsilon$$
et donc :
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |a|$$

iii. D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ |(u_n + v_n) - (a+b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\ &\leqslant |u_n - a| + |v_n - b|\end{aligned}$$
De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, on a :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_{\varepsilon,1},\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_{\varepsilon,2},\ |v_n - b| \leqslant \varepsilon$$
et donc, en posant $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$:
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |(u_n + v_n) - (a+b)| \leqslant 2\varepsilon$$
ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

iv. On peut remarquer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n v_n - ab = (u_n - a)v_n + a(v_n - b)$$
Or, par hypothèse, les suites $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0. De plus, comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée. D'après 16.24, on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a)v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a(v_n - b) = 0$$
et donc, d'après *iii* : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ab$.

v. On suppose que : $b \neq 0$. D'après 16.23, on en déduit déjà que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang p. Pour simplifier les notations, on suppose que : $p = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} &= \frac{bu_n - av_n}{bv_n}\\ &= \frac{b(u_n - a) - a(v_n - b)}{bv_n}\end{aligned}$$

Or, comme les suites $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, les points *i* et *iii* nous permettent d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} [b(u_n - a) - a(v_n - b)] = 0$$

Montrons alors que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par définition de la limite, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$$

et donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |v_n| > \max(|b + \varepsilon|, |b - \varepsilon|)$$

En fixant alors ε distinct de $-|b|$ et de $|b|$ (de sorte que $b - \varepsilon$ et $b + \varepsilon$ ne soient pas nuls, on en déduit, en posant $M = \max(|b + \varepsilon|, |b - \varepsilon|)$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{1}{v_n}\right| \leqslant \frac{1}{M}$$

donc la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et l'on peut donc conclure, avec 16.24 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$$

vi. On suppose que : $b = 0^+$ et $a > 0$. On a donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_{A,1} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_{A,1},\ 0 < v_n < \frac{1}{A}$$

et alors, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_{A,1} \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_{A,1},\ \frac{1}{v_n} > A > 0$$

De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $a > \dfrac{a}{2}$, il existe un entier naturel $n_{A,2}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \frac{a}{2} > 0$$

et alors, en posant $n_A = \max(n_0, n_{A,1})$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_A \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_A,\ \frac{u_n}{v_n} > \frac{aA}{2}$$

et finalement, prenant, pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, $A = \dfrac{2m}{a}$:

$$\forall m \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_m \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_m,\ \frac{u_n}{v_n} > m$$

ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

Preuve du théorème 16.27

i. On suppose que la suite u converge et que : $\lim_{n\to+\infty} v_n \in \{-\infty, +\infty\}$.
Comme la suite u converge, elle est bornée. On traite le cas où la suite v tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ v_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

et alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ 0 < \frac{1}{v_n} < \varepsilon$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$$

ce qui nous permet de conclure, avec 16.24 : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

ii. On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par définition, on a :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_A,\ v_n > A$$

De plus, en prenant $m = \frac{\ell}{2}$ (si u converge vers ℓ, ℓ est fixé, si u diverge evrs $+\infty$, on prend un réel ℓ arbitraire strictement positif), on peut affirmer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n > m > 0$$

et alors, en prenant $n'_A = \max(n_A, n_0)$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n'_A \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n'_A,\ u_n v_n > mA$$

ce qui nous permet de conclure (quitte à substituer $\frac{A}{m}$ à A) : $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

iii. Se démontre de manière analogue au point *i*.

Preuve du théorème 16.32

◇ Supposons que f soit continue en a et Soit considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue en a, on a, par définition :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{16.1}$$

De plus, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe un rang n_ε (ne dépendant que de α, donc que de ε puisque α ne dépend que de ε) tel que :

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ a - \alpha < u_n < a + \alpha$$

et donc, d'après (16.1) et comme les éléments de la suite u appartiennent à I :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$$

ce qui, ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, prouve que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

◇ Supposons que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas continue en a. Par contraposée de la définition de la continuité, on peut donc écrire qu'il existe un réel ε strictement positif tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \ / \ |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in \left]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right[\cap I \ / \ |f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon \tag{16.2}$$

Par construction, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a - \frac{1}{n+1} < x_n < a + \frac{1}{n+1}$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

Il en découle, d'après l'hypothèse initiale, que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, c'est-à-dire :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

Il y a donc contradiction avec (16.2) ce qui prouve finalement que f est continue en a.

Preuve du théorème 16.35

i. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée et notons P l'ensemble des majorants de u. On a donc, en particulier :

$$\forall x \in P,\ u_0 \leqslant x$$

P est donc une partie minorée de $\mathbb{R}$, non vide (car u est majorée) donc, d'après le théorème de la borne inférieure, admet une borne inférieure ℓ. ℓ est donc le plus petit majorant de u, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \ell - \varepsilon \leqslant u_{n_\varepsilon} \leqslant \ell$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ℓ, on a alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$$

et alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite u converge ves ℓ.

ii. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et non majorée. On a donc :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_A} \geqslant A$$

et alors, comme la suite u est croissante :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_A,\ u_n \geqslant A$$

ce qui signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

iii. Se démontre comme le point *i.*

iv. Se démontre comme le point *ii.*

Sommaire

Suites de nombres réels . . . 1

A. Généralités . . . 1
A.1. Définition et opérations sur les suites réelles . . . 1
A.2. Suites majorées, minorées, bornées . . . 1
A.3. Sens de variation d'une suite . . . 2
B. Exemples de suites réelles . . . 3
B.1. Suites arithmétiques . . . 3
B.2. Suites géométriques . . . 3
B.3. Suites arithmético-géométriques . . . 4
B.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . 5
C. Limite d'une suite réelle . . . 7
C.1. Limite d'une suite . . . 7
C.2. Quelques limites de référence . . . 8
C.3. Propriétés des suites convergentes . . . 10
C.4. Limites et opérations algébriques . . . 12
C.5. Ordre et limite de suites . . . 14
C.6. Limite d'une suite définie par une relation de récurrence simple . . . 16
C.7. Théorème de la limite monotone . . . 17
C.8. Croissances comparées . . . 18
D. Suites adjacentes . . . 18
E. Correction des exercices . . . 19
F. Pour aller plus loin . . . 27