# 15 Endomorphismes symétriques, matrices symétriques réelles

ECG Maths Approfondies
Semestre 4

Dans tout ce chapitre, $E$ désigne espace euclidien de dimension $n$. On identifie $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

## A. Endomorphismes symétriques

### A.1. Généralités

**Définition 15.1**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On dit que $f$ est un **endomorphisme symétrique** de $E$ s'il vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

**Exercice 15.1** Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. Prouver que $\text{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(f)$ dans $E$.

**Proposition 15.2**

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de $E$ et $f$ un endomorphisme de $E$.
$f$ est un endomorphisme symétrique de $E$ si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle$$

**Exercice 15.2** Démontrer la proposition 15.2.

**Proposition 15.3**

Soient $f$ un endomorphisme symétrique de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Si $F$ est stable par $f$, alors $F^\perp$ est stable par $f$.

**Preuve** Supposons que $F$ soit stable par $f$. Soit $x \in F^\perp$. Comme $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$, on a :

$$\forall y \in F,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

et donc, comme $f(y)$ appartient à $F$ si $y$ appartient à $F$ :

$$\forall y \in F,\ \langle f(x), y\rangle = 0$$

d'où : $f(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par $f$.

□

## A.2. Lien entre endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

**Proposition 15.4**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$. $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$ si et seulement si sa matrice représentative dans une base orthonormale de $E$ est symétrique réelle.

**Exercice 15.3** Démontrer la proposition 15.4.

**Remarque** Attention aux hypothèses : la matrice associée à un endomorphisme dans une base quelconque de $E$ n'est en général pas une matrice symétrique.

**Exercice 15.4** On munit $E = \mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique usuelle. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $E$ et $\mathcal{C} = ((1,0),(1,1))$ une base de $E$. On note enfin $f$ (respectivement $g$) l'endomorphisme de $E$ associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$).

$f$ et $g$ sont-ils des endomorphismes symétriques de $E$ ?

# B. Projections orthogonales, moindres carrés

Dans tout ce paragraphe, $p$ désigne un entier naturel non nul.

## B.1. Projections orthogonales

**Définition 15.5**

Soit $F$ un sous espace vectoriel de $E$. On appelle **projection orthogonale** de $E$ sur $F$ la projection, notée $p_F$, de $E$ sur $F$ dans la direction $F^\perp$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, on a :

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

**Proposition 15.6**

Si $p$ est un endomorphisme de $E$, alors :

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \begin{cases} p^2 = p \\ \mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$$

**Preuve** ($\Longrightarrow$) Supposons que $p$ est une projection orthogonale. Alors $p$ est un projecteur donc : $p^2 = p$. De plus, $p$ est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ dans la direction $\mathrm{Ker}(p)$ donc, comme $p$ est une projection orthogonale :

$$\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$$

($\Leftarrow$) Supposons que : $p^2 = p$ et $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Comme $p^2 = p$, $p$ est un projecteur, donc $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires. Comme $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont orthogonaux, on en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(p) = [\mathrm{Im}(p)]^\perp$$

donc $p$ est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ dans la direction $F^\perp$, donc c'est une projection orthogonale.

□

**Proposition 15.7**

Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une base orthonormale de $F$. Si $p_F$ est la projection orthogonale de $E$ sur $F$, alors :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle\, u_i$$

**Preuve** Soit $x \in E$. Comme $p(x)$ appartient à $F$ et comme $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une base orthonormale de $F$, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle p_F(x), u_i\rangle\, u_i$$

et donc, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} p_F(x) &= \sum_{i=1}^{k} \langle p_F(x) - x + x, u_i\rangle\, u_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle p_F(x) - x, u_i\rangle\, u_i + \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle\, u_i. \end{aligned}$$

De plus, comme $p_F$ est un projecteur orthogonal, $p_F(x) - x$ appartient à $F^{\perp}$ donc, comme $u_1, \dots, u_k$ appartiennent tous à $F$ :

$$\forall i \in [\![1, k]\!]\,,\ \langle p_F(x) - x, u_i\rangle = 0$$

d'où :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle\, u_i$$

□

**Proposition 15.8**

Si $p$ est un projecteur de $E$, alors $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

**Exercice 15.5** Démontrer la proposition 15.8.

**Théorème 15.9**

Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $x$ un élément de $E$. L'application $z \mapsto ||z - x||$ admet un minimum sur $F$, atteint uniquement en $p_F(x)$ ; autrement dit :

$$\forall z \in F,\ ||p_F(x) - x|| \leqslant ||z - x||$$

et :

$$\forall z \in F,\ (||z - x|| = ||p_F(x) - x|| \Longrightarrow z = p_F(x))$$

On dit aussi que $p_F(x)$ est la **meilleure approximation** de $z$ dans $F$.

**Remarque** On retrouve ainsi une propriété des projections orthogonales dans le plan ou dans l'espace : le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur $x$ de $E$ sur $F$ est le vecteur minimisant la distance de $x$ à $F$.

**Exercice 15.6** Démontrer le théorème 15.9 (on pourra utiliser le théorème de Pythagore).

## B.2. Problème des moindres carrés

Dans cette partie, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique et la norme euclidienne associée est notée $||\cdot||$.

**Proposition 15.10**

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A$ est de rang $p$, alors ${}^tAA$ est inversible.

**Exercice 15.7** On se propose de démontrer la proposition 15.10.

1. Prouver que, si $X$ appartient à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$AX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

2. En déduire que ${}^tAA$ est inversible.

**Proposition 15.11 ▶ Problème des moindres carrés**

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $A$ est de rang $p$, alors l'application $X \mapsto ||AX - B||$ admet un minimum sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, atteint en un unique vecteur $X_0$, solution de l'équation ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.
Autrement dit :

$$||AX_0 - B|| = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||AX - B|| \Longleftrightarrow X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$$

**Remarques**

**a.** Le raisonnement employé dans la démonstration doit être parfaitement maîtrisé car il n'est pas rare que l'énoncé attende une preuve : si le programme évoque la résolution du problème des carrés, il spécifie également qu'aucun des résultats de cette section n'est exigible des candidats.

**b.** Ce résultat peut être utile en statistique pour déterminer l'équation de la droite de régression de $Y$ en $X$ pour une série statistique double $(X, Y)$ (par la méthode des moindres carrés).

**Preuve**

◇ On note $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $F = \{AX,\ X \in E\}$. On peut remarquer que $g : X \mapsto ||AX - B||$ admet un minimum sur $E$, atteint en $X_1$, si et seulement si $Y \mapsto ||Y - B||$ admet un minimum sur $F$, atteint en $AX_1$.
Or, $F$ étant un sous-espace vectoriel de $E$, on sait que $Y \mapsto ||Y - B||$ admet un minimum sur $F$, atteint uniquement en $Y_1$ où $Y_1$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $F$.
Par ailleurs, on sait que l'application $f : X \mapsto AX$ est une application linéaire injective (car $A$ est de rang $p$) de $E$ dans $\mathrm{Im}(f) = F$, donc $f$ est un isomorphisme de $G$ sur $F$ et il existe un unique vecteur $X_0$ de $E$ tel que : $AX_0 = Y_1$.
Finalement, on a prouvé qu'il existe un unique vecteur $X_0$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum de $||AX - B||$ sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

◇ On prouve maintenant que : $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$. Par définition de $X_0$, on sait que $AX_0$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $F$, donc :

$$AX_0 \in F \quad \text{et} \quad AX_0 - B \in F^\perp.$$

Par ailleurs, en notant $A_1, \ldots, A_p$ les colonnes de $A$, on sait que $(A_1, \ldots, A_p)$ est une famille génératrice de $F$ (c'en est même une base puisque $A$ est de rang $p$) donc :

$$\begin{aligned} AX_0 - B \in F^\perp &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ AX_0 - B \perp A_i \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle AX_0 - B, A_i \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ {}^tA_i\,(AX_0 - B) = 0 \end{aligned}$$

soit encore, par définition du produit matriciel (en remarquant que ${}^tA_i\,(AX_0 - B)$ est la $i^{ème}$ ligne de ${}^tA\,(AX_0 - B)$) :

$$\begin{aligned} AX_0 - B \in F^\perp &\Longleftrightarrow {}^tA\,(AX_0 - B) = 0 \\ &\Longleftrightarrow {}^tAAX_0 - {}^tAB = 0 \\ &\Longleftrightarrow {}^tAAX_0 = {}^tAB \end{aligned}$$

et finalement, comme ${}^tAA$ est inversible :

$$AX_0 - B \in F^\perp \iff X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB.$$

□

## C. Réduction des endomorphismes symétriques, des matrices symétriques réelles

**Proposition 15.12**

*i.* Toute matrice symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle.

*ii.* Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$ admet au moins une valeur propre.

**Remarque** Ce théorème est admis, ne pouvant se démontrer simplement avec les outils du programme.

### C.1. Réduction des endomorphismes symétriques

**Proposition 15.13**

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique $f$ de $E$ sont deux à deux orthogonaux ; autrement dit, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres de $f$, alors :

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)$$

**Preuve** Soient $\lambda$ et $\mu$ deux valeurs propres distinctes de $f$. On considère deux vecteurs propres $x$ et $y$ de $f$, respectivement associés à $\lambda$ et $\mu$. On a alors, comme $f$ est un endomorphisme symétrique :

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

donc :

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \mu y\rangle$$

et par bilinéarité du produit scalaire :

$$\lambda\,\langle x, y\rangle = \mu\,\langle x, y\rangle$$

et comme $\lambda \neq \mu$ :

$$\langle x, y\rangle = 0$$

donc finalement :

$$E_\lambda(f) \perp E_\mu(f)$$

□

**Théorème 15.14 ► Théorème spectral (endomorphismes)**

Si $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$, alors :

*i.* $f$ est diagonalisable,

*ii.* il existe une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.

## C.2. Réduction des matrices symétriques réelles

**Proposition 15.15**

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle $M$ sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; autrement dit, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres de $M$, alors :

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda(M) \perp E_\mu(M)$$

**Preuve** Soient $\lambda$ et $\mu$ deux valeurs propres distinctes de $M$. On considère deux vecteurs propres $X$ et $Y$ de $M$, respectivement associés à $\lambda$ et $\mu$. On a alors, comme $M$ est une matrice symétrique :

$${}^tXMY = {}^t({}^tXMY) = {}^tYMX$$

donc :

$$\mu\, {}^tXY = \lambda\, {}^tYX$$

et comme ${}^tYX = {}^tXY = \langle X, Y\rangle$ et $\mu \neq \lambda$ :

$$\langle X, Y\rangle = 0$$

donc finalement :

$$E_\lambda(M) \perp E_\mu(M)$$

□

**Théorème 15.16 ▶ Théorème spectral (matrices)**

Si $M$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

*i.* $M$ est diagonalisable,

*ii.* il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M$,

*iii.* il existe une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ orthogonale telles que :

$$A = PD\,{}^tP$$

**Preuve** Soit $M$ une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $M$. Comme la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et comme $M$ est une matrice symétrique réelle, $f$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral, il existe alors une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ relativement à laquelle la matrice $D$ associée à $f$ est diagonale et on a alors, en notant $P$ la matrice de passage de la base canonique que $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$, on a :

$$M = PDP^{-1}$$

Ainsi, $M$ est diagonalisable et les vecteurs colonnes de $P$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M$. Par ailleurs, cette base est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Enfin, comme $P$ est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $P$ est une matrice orthogonale, donc : $P^{-1} = {}^tP$.

□

**Exercice 15.8** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice $P$ orthogonale et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

# D. Forme quadratique

## D.1. Forme quadratique associée à une matrice symétrique réelle

**Définition 15.17**

Si $A$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $q : X \mapsto \langle AX, X\rangle = {}^tXAX$ (définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est appelée **forme quadratique associée à $A$**.

**Remarque** Cette définition est cohérente avec la notion de forme quadratique étudiée dans le chapitre précédent. On pourrait en effet prouver (et le soin en est laissé au lecteur) que l'application $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique.

**Théorème 15.18**

Soit $A$ une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $q$ la forme quadratique associée à $A$.

*i.* $q$ est positive sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes positives ou nulles,

*ii.* $q$ est définie positive sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes strictement positives,

*iii.* $q$ est négative sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes négatives ou nulles,

*iv.* $q$ est définie négative sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes strictement négatives.

**Remarque** Ce résultat est un résultat fondamental qui sera très utile en analyse, dans la recherche d'extremum de fonctions de plusieurs variables.

**Exercice 15.9** Démontrer la proposition 15.18. On pourra utiliser 15.16.

# E. Correction des exercices

### Correction de l'exercice 15-1

Comme $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

Soit alors $(x, z) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Im}(f)$. Il existe $y \in E$ tel que : $f(y) = z$ et alors :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, f(z)\rangle \\ &= \langle f(x), z\rangle \\ &= \langle 0, z\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

donc :

$$\operatorname{Ker}(f) \subset [\operatorname{Im}(f)]^{\perp}$$

De plus, comme $E$ est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(f)) &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(f)) \\ &= \dim [\operatorname{Im}(f)]^{\perp}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\operatorname{Ker}(f) = [\operatorname{Im}(f)]^{\perp}$$

### Correction de l'exercice 15-2

► On suppose que $f$ est un endomorphisme symétrique. On a donc :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$
et donc, en particulier :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle$$

► Supposons maintenant que :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle$$
Soit $(x,y) \in E^2$. Comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de $E$, on a :
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle\, e_j$$
et alors, comme $f$ est linéaire :
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, f(e_i) \quad \text{et} \quad f(y) = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle\, f(e_j)$$
et par bilinéarité du produit scalaire :
$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, f(e_i), \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle\, e_j \right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_j\rangle \langle f(e_i), e_j\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle\, f(e_j) \right\rangle\\ &= \langle x, f(y)\rangle\end{aligned}$$
donc $f$ est symétrique.

### Correction de l'exercice 15-3

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de $E$. Soit $M$ la matrice associée à $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $M$ est une matrice à coefficients réels. De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $E$ et comme $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ appartiennent tous à $E$, on a :
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j), e_i\rangle\, e_i$$
et donc :
$$M = (m_i, j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\langle f(e_j), e_i\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
De plus, d'après 15.2, on a :
$$\begin{aligned} f \text{ est un endomorphisme symétrique} &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle\\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{j,i} = m_{i,j}\\ &\iff {}^tM = M\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 15-4

► On sait que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique d $\mathbb{R}^2$ donc, comme $A$ est une matrice symétrique réelle, $f$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

► La base $\mathcal{C}$ n'est pas une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ donc on ne peut rien conclure *a priori*. En revanche, on peut remarquer que :
$$g(1,0) = (3,1) \quad \text{et} \quad g(1,1) = (3,3)$$
donc :
$$\langle g(1,0), (3,1)\rangle = 4 \quad \text{et} \quad \langle (1,0), g(1,1)\rangle = 3$$
donc :
$$\langle g(1,0), (3,1)\rangle = \langle (1,0), g(1,1)\rangle$$
donc $g$ n'est pas un endomorphisme symétrique.

### Correction de l'exercice 15-5

($\Longrightarrow$) On suppose que $p$ est un projecteur orthogonal. $p$ est alors un endomorphisme de $E$ et, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \langle p(x), y\rangle &= \langle p(x), y - p(y) + p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x) - x + x, p(y)\rangle \\ &= \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x) - x, p(y)\rangle + \langle x, p(y)\rangle\end{aligned}$$

De plus, comme $p$ est un projecteur orthogonal sur $F$, pour tout $(x,y) \in F^2$, $p(x)$ et $p(y)$ appartiennent à $F$ tandis que $y - p(y)$ et $p(x) - x$ appartiennent à $F^\perp$, donc :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$

donc $p$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

($\Leftarrow$) On suppose que $p$ est un endomorphisme symétrique de $E$. On a donc :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$

Soit alors $(x,z) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que : $p(y) = z$ et alors :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, p(z)\rangle \\ &= \langle p(x), z\rangle \\ &= \langle 0, z\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$$

donc, comme $p$ est un projecteur, $p$ est un projecteur orthogonal.

### Correction de l'exercice 15-6

Soient $x$ un élément de $E$ et $z$ un élément de $F$. On a :

$$||z - x||^2 = ||z - p_F(x) + p_F(x) - x||^2$$

De plus, par définition de $p_F$ et comme $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a :

$$z - p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(x) - x \in F^\perp$$

donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$||z - x||^2 = ||z - p_F(x)||^2 + ||p_F(x) - x||^2$$

et donc, une norme étant toujours positive :

$$||z - x||^2 \geqslant ||p_F(x) - x||^2$$

et comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ :

$$||z - x|| \geqslant ||p_F(x) - x||$$

et :

$$\begin{aligned}||z - x||^2 = ||p_F(x) - x||^2 &\Longleftrightarrow ||z - p_F(x)||^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow z - p_F(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow z = p_F(x)\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 15-7

1. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Par définition du produit matriciel, on a, en notant $A_1, \ldots, A_p$ les vecteurs colonnes de $A$ :
$$AX = \sum_{i=1}^{p} x_i A_i.$$
De plus, comme $A$ est de rang $p$, la famille $(A_1, \ldots, A_p)$ est libre, donc :
$$\begin{aligned} AX = 0 &\Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ x_i = 0 \\ &\Longrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

2. Notons déjà que, comme $A$ appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ est une matrice carrée d'ordre $p$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a :
$$\begin{aligned} {}^tAAX = 0 &\Longrightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \\ &\Longrightarrow {}^t(AX)(AX) = 0 \\ &\Longrightarrow ||AX||^2 = 0 \\ &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow X = 0 \end{aligned}$$
donc ${}^tAA$ est inversible.

### Correction de l'exercice 15-8

◇ Notons déjà que $A$ est symétrique réelle, donc il existe effectivement une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que : $A = PD\,{}^tP$. Pour les déterminer, on cherche les valeurs propres de $A$, leurs sous-espaces propres associés puis, pour chacun d'eux, on détermine une base orthonormale.

◇ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Or on a :
$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
donc :
$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ \det(A - \lambda I_2) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (2-\lambda)(4-\lambda) = 0\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$
Ainsi les valeurs propres de $A$ sont 2 et 4. De plus, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} AX = 2X &\Longleftrightarrow (A - 2I_2)\,X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\Longleftrightarrow x - y = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = y \end{aligned}$$
donc le sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre 2 est :
$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
De plus on a :
$$\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{2}$$
donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $E_2(A)$.

Enfin on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} AX = 4X &\iff (A - 4I_2)\, X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff -x - y = 0 \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre 4 est :

$$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus on a :

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$$

donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $E_4(A)$.

◇ Finalement, on peut affirmer que $A = PD\,{}^tP$ avec :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### Correction de l'exercice 15-9

*i.* ◇ Supposons que $q$ soit positive et considérons une valeur propre $\lambda$ de $A$. Il existe un vecteur $X$ non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$ et on a alors :

$$q_A(X) = \langle AX, X\rangle = \lambda \langle X, X\rangle$$

donc, comme $q_A(X) \geqslant 0$ :

$$\lambda \langle X, X\rangle \geqslant 0$$

d'où, comme ${}^tXX > 0$ (car $X \neq 0$) :

$$\lambda \geqslant 0$$

Ainsi, si $q$ est positive, alors les valeurs propres de $A$ sont toutes positives ou nulles.

◇ Réciproquement, supposons que les valeurs propres de $A$ sont toutes positives ou nulles. Comme $A$ est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice orthogonale $P$ telles que : $A = PD{}^tP$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q_A(X) &= {}^tX(PD{}^tP)X \\ &= {}^t({}^tPX)D({}^tPX) \end{aligned}$$

Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En notant ${}^tPX = Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de $D$, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q_A(X) &= {}^tYDY \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \end{aligned} \tag{15.1}$$

donc, comme les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $A$ sont toutes positives ou nulles :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q_A(X) \geqslant 0$$

Par conséquent, $q$ est positive si et seulement si les valeurs propres de $A$ sont toutes positives ou nulles.

*ii.* ◇ Supposons que $q$ soit définie positive et considérons une valeur propre $\lambda$ de $A$. Il existe un vecteur $X$ non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$ et on a alors, de même que dans le point précédent :

$$q_A(X) = \langle AX, X\rangle = \lambda \langle X, X\rangle$$

donc, comme ${}^tXX > 0$ et $q_A(X) > 0$ (car $X \neq 0$) :

$$\lambda > 0$$

Ainsi, si $q$ est définie positive, alors les valeurs propres de $A$ sont toutes strictement positives.

◇ Réciproquement, supposons que les valeurs propres de $A$ sont toutes strictement positives. Comme les valeurs propres de $A$ sont toutes positives, le résultat du point précédent assure que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q_A(X) \geqslant 0$$

De plus, en conservant les notations du point précédent, on a également, d'après (15.1) et comme les termes de la somme sont tous positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} q_A(X) = 0 &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i y_i^2 = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = 0 \\ &\iff Y = 0 \end{aligned}$$

donc, comme $Y = {}^tPX$ et comme ${}^tP$ est inversible :

$$q_A(X) = 0 \iff X = 0$$

donc $A$ est définie positive. Ainsi $A$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

# F. Pour aller plus loin

### Preuve du théorème spectral

On procède par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel, en montrant que, pour tout entier naturel $n$ non nul, la proposition $\mathscr{P}(n)$ : « si $E$ est un espace euclidien de dimension $n$ et si $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$, il existe une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ » est vraie.

◇ Pour $n = 1$. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension 1 et $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. Comme $E$ est de dimension 1, il existe un vecteur $x$ normé tel que : $E = \text{Vect}(x)$. En outre, comme $f$ est un endomorphisme de $E$, $f(x)$ appartient à $E$ donc il existe un réel $\lambda$ tel que :

$$f(x) = \lambda x$$

et $(x)$ est donc une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soient alors $E$ un espace euclidien de dimension $n+1$ et $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. D'après (15.12), $f$ admet au moins une valeur propre $\lambda$ et il existe donc un vecteur $x$ non nul tel que : $f(x) = \lambda x$. On note alors :

$$e_{n+1} = \frac{1}{||x||}\, x \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(e_{n+1})$$

Comme $F$ est stable par $f$, $F^\perp$ est stable par $f$ d'après 15.3. On en déduit que la restriction $g$ de $f$ à $F^\perp$ est un endomorphisme de $F^\perp$. De plus, on a naturellement, $f$ étant symétrique :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (F^\perp)^2,\ \langle g(x), y\rangle &= \langle f(x), y\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle \\ &= \langle x, g(y)\rangle \end{aligned}$$

donc $g$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$. Enfin, comme $F$ est une droite vectorielle de $E$ et comme $E$ est de dimension $n+1$, $F^\perp$ est de dimension $n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de $g$, donc de $f$.
Comme $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $E$ et comme $(e_{n+1})$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ sont des bases orthonormales respectives de $F$ et $F^\perp$, on en déduit que la famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $f$, donc : $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Ainsi, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

# Sommaire