14 Algèbre bilinéaire

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel et n désigne un entier naturel. On identifie $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

A. Produits scalaires et normes euclidiennes

A.1. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définition 14.1

Soit φ une application de E^2 dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.

i. On dit que φ est **bilinéaire** de E^2 dans F si :
- pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot, y) : x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et si :
- pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire,

ii. On dit que φ est une forme bilinéaire sur E^2 si φ est bilinéaire et si $F = \mathbb{R}$.

iii. On dit que φ est symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Proposition 14.2

Si φ est une forme bilinéaire sur E^2, alors :

i. pour tout vecteur x de E, on a :

$$\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$$

ii. si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles de vecteurs de E et si $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles de réels, alors :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j)$$

Remarque Ces résultats découlent de manière immédiate de la linéarité des applications $\varphi(\cdot, y)$ et $\varphi(x, \cdot)$.

Proposition 14.3

Si φ est une forme symétrique sur E^2, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i. φ est une forme bilinéaire sur E^2,

ii. pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot, y) : x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire,

iii. pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot) : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Remarque Cette proposition est important puisqu'elle simplifiera sensiblement l'étude de la bilinéarité d'une forme symétrique.

Preuve

$(i \Longrightarrow ii)$ Immédiat, par définition d'une application bilinéaire.

$(ii \Longrightarrow iii)$ On suppose que, pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot, y) : x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Comme φ est une forme symétrique, on a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in E,\ \forall (y,y') \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, \lambda y + y') &= \varphi(\lambda y + y', x)\\ &= \lambda\varphi(y,x) + \varphi(y',x)\\ &= \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')\end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

($iii \Longrightarrow i$) On suppose que, pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire. De même que dans le point précédent, on prouve que, pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot,y)$: $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire, ce qui permet alors d'affirmer que φ est bilinéaire. □

Exercice 14.1 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto P(0)\,Q(1) + P(1)\,Q(0)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 14.4

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E^2. On appelle **forme quadratique** associée à φ l'application q définie sur E par :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x,x)$$

Étant donnée une forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique φ, on dit que :

i. q est **positive** si :

$$\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0$$

ii. q est **définie** si, lorsque x appartient à E :

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

iii. q est **définie positive** si elle est définie et positive sur E.

Proposition 14.5

Étant donnée une forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique φ, les assertions suivantes sont équivalentes :

i. q est définie positive,

ii. $\forall x \in E \setminus \{0\},\ q(x) > 0$.

Remarque Ce résultat est immédiat puisque, pour toute forme quadratique q, on a toujours $q(0) = 0$, qui est bien positif ou nul.

A.2. Produit scalaire

Définition 14.6

On dit que φ est un **produit scalaire** sur E si :

i. φ est une forme bilinéaire symétrique sur E^2 et si :

ii. la forme quadratique associée à φ est définie positive.

Pour tout couple (x,y) d'éléments de E, le réel $\varphi(x,y)$ est appelé **produit scalaire des vecteurs** x et y et, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, ce produit scalaire sera noté $\langle x, y\rangle$.

Remarque Si φ est un produit scalaire, on dira aussi, pour plus de simplicité, que φ est définie positive lorsque q est définie positive, mais il faudra veiller à ne pas confondre les deux applications.

Il est important de bien comprendre qu'il s'agit d'un abus de langage car un produit scalaire n'est pas toujours positif. Par exemple, pour tout vecteur non nul x de E, si φ est un produit scalaire, on a alors :

$$\varphi(x,-x) = -\varphi(x,x) < 0$$

Proposition 14.7

i. Si $E = \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi : ((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

ii. Si $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

iii. Si $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (où a et b sont deux réels tels que $a < b$), l'application $\varphi : (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 14.2 Démontrer la proposition 14.7.

A.3. Norme euclidienne

Définition 14.8

Étant donné un produit scalaire φ sur E et q la forme quadratique associée, on appelle **norme euclidienne** associée à φ l'application N définie sur E par :

$$\forall x \in E,\ N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$$

Plus généralement, on dira qu'une application N définie sur E est une norme euclidienne sur E s'il existe un produit scalaire dont N soit la norme euclidienne associée.
Pour tout élément x de E, $N(x)$ est appelé **norme du vecteur** x et, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera :

$$N(x) = ||x||$$

Remarques

a. La norme associée à un produit scalaire φ est bien une application définie sur E puisque l'application $x \mapsto \varphi(x,x)$ est positive sur E.

b. Il y a une unique norme euclidienne associée à un produit scalaire donné et on verra plus loin que, si N est une norme euclidienne, il y a un unique produit scalaire dont N soit la norme euclidienne associée.

c. En général, pour éviter d'écrire la racine carrée tout le long des calculs, on prend l'habitue de calculer $||x||^2$ puis de prendre la racine carrée à la fin.

Définition 14.9

Étant donné un produit scalaire φ sur E, on dit qu'un vecteur x de E est **normé** (ou, plus rarement, **unitaire**) si :

$$||x|| = 1$$

Remarque Il est préférable d'utiliser l'adjectif « normé » plutôt que « unitaire », notamment dans le cas des espaces de polynômes. En effet, un polynôme est aussi dit unitaire si son coefficient dominant est 1, ce qui est sans rapport avec la notion de produit scalaire.

Proposition 14.10

Soient $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E et $||\cdot||$ sa norme euclidienne associée. On a :

i. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$,

ii. $\forall x \in E,\ ||x|| \geqslant 0$,

iii. $\forall x \in E,\ (||x|| = 0 \iff x = 0)$,

iv. $\forall (x,y) \in E^2,\ ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2$, *v.* $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle = \dfrac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}$.

Remarques

a. Le point *iii* de cette proposition offre un moyen souvent simple de prouver qu'un vecteur x est nul : si l'on dispose d'un produit scalaire, il suffit de prouver que la norme de x est nulle.

b. Le point v de la proposition est utile notamment pour démontrer qu'une application N est une norme euclidienne (question rare aux concours) : il suffit en effet de démontrer que l'application $(x,y) \mapsto \frac{N^2(x+y)-N^2(x)-N^2(y)}{2}$ est un produit scalaire et de constater que N est sa norme euclidienne associée.

Preuve

Les trois premiers points sont des conséquences immédiates de la définition de la norme et du produit scalaire.
Soit alors $(x,y) \in E^2$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve le point *iv* et le point v s'en déduit de manière immédiate.

□

A.4. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 14.11 ▶ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E et $||\cdot||$ sa norme euclidienne associée. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\langle x,y\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$$

De plus l'égalité $|\langle x,y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ a lieu si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Remarques

a. Attention à l'application de cette inégalité, source d'erreurs fréquentes (la racine carrée intervenant dans l'expression de la norme étant souvent oubliée). Pour simplifier, on l'utilise souvent « élevée au carré », c'est-à-dire sous la forme :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle^2 \leqslant ||x||^2\, ||y||^2$$

b. La démonstration de ce théorème est fondamentale, car la méthode est parfois utile aux concours.

c. Le lecteur remarquera dans la démonstration de ce théorème que le caractère « défini » du produit scalaire n'intervient pas pour démontrer l'inégalité, mais seulement pour étudier le cas d'égalité.
Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable pour toute forme bilinéaire symétrique positive, par exemple la covariance sur l'espace vectoriel des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant un moment d'ordre 2.

Exemple 14.1

Cette inégalité, appliquée aux produits scalaires de référence défini dans 14.7 nous donne les inégalités (classiques) suivantes :

i. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall ((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

i. Si $a < b$, alors : $\forall (f,g) \in (\mathrm{C}^0([a,b],\mathbb{R}))^2,\ \left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 14.3 On se propose de démontrer la proposition 14.11. On considère pour cela deux vecteurs x et y de E.

1. Démontrer le résultat dans le cas où $x = 0$.
2. On suppose maintenant que $x \neq 0$. En considérant le nombre de racines de la fonction polynôme $P : \lambda \mapsto ||\lambda x + y||^2$, démontrer le résultat attendu.

Proposition 14.12 ▶ Inégalité triangulaire

Si $||\cdot||$ est une norme euclidienne sur E, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

Exercice 14.4 Démontrer la proposition 14.12.

B. Orthogonalité

Dans cette section, on munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont la norme euclidienne associée est notée $||\cdot||$. De plus, n et p désignent deux entiers naturels.

B.1. Vecteurs orthogonaux

Définition 14.13

Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Si les vecteurs x et y sont orthogonaux, on note : $x \perp y$.

Remarques

a. Attention, l'orthogonalité de deux vecteurs est liée au produit scalaire considéré. Ainsi, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire mais pas pour un autre.

b. En particulier, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, quel que soit le produit scalaire.

c. Quand il n'y a pas de confusion possible quant au produit scalaire considéré, on dira plus simplement que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

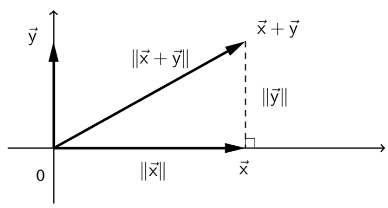
Exemple 14.2 On peut vérifier que les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux orhogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 14.14 ▶ Théorème de Pythagore

Étant donnés deux vecteurs x et y de E, on a :

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Remarque Le lecteur remarquera que ce théorème porte plutôt bien son nom si l'on se souvent du célèbre théorème de Pythagore portant sur les côtés d'un triangle rectangle.



Preuve Pour tout couple $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 = 0 &\iff ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \\ &\iff \langle x,y\rangle = 0 \\ &\iff x \perp y \end{aligned}$$

□

B.2. Familles orthogonales, orthonormales

Définition 14.15

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

i. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une **famille orthogonale** pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ i \neq j \Longrightarrow x_i \perp x_j$$

ii. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une **famille orthonormale** pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarques

a. Quand il n'y a pas de confusion possible quant au produit scalaire considéré, on dira plus simplement que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale (ou orthonormale) sans mentionner le produit scalaire considéré.

b. Un produit scalaire étant symétrique, pour étudier l'orthogonalité d'une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il suffit de calculer le produit scalaire $\langle x_i, x_j\rangle$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Proposition 14.16

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

i. Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale et **ne contient pas le vecteur nul**, alors elle est libre.

ii. Si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormale, alors elle est libre.

Remarques

a. Attention, une famille peut être orthogonale et être liée : c'est le cas par exemple de la famille $(0,x)$ pour tout vecteur x de E, d'où l'importance de l'hypothèse de non nullité des vecteurs d'une famille orthogonale pour pouvoir affirmer sa liberté.

b. En revanche, si une famille est orthonormale, cette précision est inutile puisque, tous les vecteurs étant normés, ils ne peuvent être nuls.

Preuve Une famille orthonormale étant orthogonale et ne contenant pas le vecteur nul, il suffit de démontrer le premier point. On suppose donc que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale et ne contient pas le vecteur nul. Soit alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels. On a alors, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$$

et comme $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_j \langle x_j, x_j\rangle = 0$$

et comme $\langle x_j, x_j\rangle \neq 0$ (car $x_j \neq 0$) pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_j = 0$$

ce qui prouve que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. □

B.3. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 14.17

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et l'on note $F \perp G$ si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G ; autrement dit :

$$F \perp G \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in F \times G,\ \langle x,y\rangle = 0$$

Proposition 14.18

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F et G sont de dimension finie et on note $\mathcal{B}_F = (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une base de G.
F et G sont orthogonaux si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{B}_F$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{B}_G$; autrement dit :

$$F \perp G \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\,,\ f_i \perp g_j$$

Exercice 14.5 Démontrer la proposition 14.18.

Proposition 14.19

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont orthogonaux, ils sont en somme directe ; autrement dit :

$$F \perp G \Longrightarrow F + G = F \oplus G$$

En conséquence, si F et G sont orthogonaux, la concaténation d'une famille libre de F et d'une famille libre de G est une famille libre.

Preuve Supposons que F et G soient orthogonaux et considérons un vecteur x de $F \cap G$. Alors x appartient à F et à G donc : $x \perp x$, c'est-à-dire :

$$\langle x,x\rangle = 0$$

et donc : $x = 0$. Comme 0 appartient à F et à G, on a donc :

$$F \cap G = \{0\}$$

ce qui nous permet d'affirmer que la somme $F + G$ est directe. □

Définition 14.20

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal** de F l'ensemble $F^\perp$ des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{x \in E \ /\ \forall y \in F,\ x \perp y\}$$

Remarque Par abus de langage, si x est un vecteur de E, on appellera « orthogonal de x » l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}(x)$.

Proposition 14.21

Si F est un sous-espace vectoriel de E, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
Si de plus F est de dimension finie $p \geqslant 1$ et admet pour base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, alors :

$$F^\perp = \{x \in E \ /\ \forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ x \perp e_i\}$$

Preuve

- $F^\perp$ est inclus dans E par définition et contient le vecteur nul (orthogonal à tout vecteur de E) donc n'est pas vide. De plus, par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in (F^\perp)^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall z\in F,\ \langle \lambda x+y,z\rangle &= \lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\\ &=\lambda\times 0+0\\ &=0\end{aligned}$$

d'où :
$$\forall (x,y)\in (F^\perp)^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall z\in F,\ \lambda x+y\perp z$$

et donc :
$$\forall (x,y)\in (F^\perp)^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x+y\in F^\perp$$

ce qui permet de conclure que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

- On suppose que F est de dimension finie non nulle et on considère une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de F. Compte tenu de la définition et comme $e_1,\dots,e_p$ appartiennent tous à F, on a évidemment :

$$F^\perp\subset\{x\in E\ /\ \forall i\in [\![1,p]\!]\,,\ x\perp e_i\}$$

Soit alors z un élément de $\{x\in E\ /\ \forall i\in [\![1,p]\!]\,,\ x\perp e_i\}$ et $y=\sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ un élément quelconque de F. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle z,y\rangle=\sum_{i=1}^{p} u_i\langle z,e_i\rangle=0$$

donc :
$$\forall z\in\{x\in E\ /\ \forall i\in [\![1,p]\!]\,,\ x\perp e_i\},\ z\in F^\perp$$

d'où :
$$\{x\in E\ /\ \forall i\in [\![1,p]\!]\,,\ x\perp e_i\}\subset F^\perp$$

ce qui achève la preuve.

□

C. Espaces euclidiens

Définition 14.22

On appelle **espace euclidien** tout couple (E,φ) où E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ est un produit scalaire sur E.

Remarques

a. Si (E,φ) est un espace euclidien et s'il n'y a pas de doute quant au produit scalaire, on parlera plus simplement de l'espace euclidien E.

b. Dans toute la suite du cours, E désigne un espace euclidien de dimension n et p est un entier naturel tel que : $1\leqslant p\leqslant n$.

C.1. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Proposition 14.23

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice de F, alors, pour tout vecteur x de E :
$$x\in F^\perp\iff\forall i\in [\![1,p]\!]\,,\ x\perp x_i$$

Remarque Ce résultat se démontre comme 14.21.

Proposition 14.24

On rappelle que E est de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

L'ensemble $F^{\perp}$ est alors appelé **le supplémentaire orthogonal** de F dans E et vérifie :

$$(F^{\perp})^{\perp} = F$$

Remarque Ce résultat sera démontré dans la section « Pour aller plus loin ».

Remarques

a. En particulier, le supplémentaire orthogonal de E dans lui-même est $\{0_E\}$. Le vecteur nul de E est donc l'unique vecteur de E orthogonal à tous les vecteurs de E. Notez bien cette remarque, qui s'avérera utile dans de nombreuses situations pour démontrer qu'un vecteur est nul.

b. Attention à l'hypothèse initiale. Si E n'est pas de dimension finie, F et $F^{\perp}$ ne sont pas toujours supplémentaires. On pourra cependant retenir que c'est le cas si F est de dimension finie.

C.2. Bases orthogonales, bases orthonormales

Définition 14.25

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. On dit que :

i. $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base orthogonale** de E si elle est orthogonale et forme une base de E,

ii. $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une **base orthonormale** de E si elle est orthonormale et forme une base de E.

Remarque Ça valait bien la peine d'une définition, non ?

Proposition 14.26

Si E est un espace euclidien de dimension n, alors :

i. toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base orthogonale de E,

ii. toute famille orthonormale de n vecteurs de E est une base orthonormale de E.

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 14.16.

b. On vérifie que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 14.27

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Remarques

a. Ce résultat est fondamental puisqu'il garantit que, si E est un espace euclidien, on peut toujours trouver une base orthonormale de E, par exemple en appliquant la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt exposée après.

b. La démonstration de ce théorème n'est pas prioritaire. Cependant, la méthode employée (raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien) s'avérera utile pour certaines questions, c'est pourquoi elle est proposée dans la section « Pour aller plus loin ».

Exercice 14.6 Soit E un espace euclidien et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille libre de p vecteurs de E (avec $p \geqslant 2$). On pose :

$$u_1 = \frac{1}{||e_1||}\, e_1$$

et :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!]\,,\ u_{k+1} = \frac{1}{\left\| e_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle\, u_i \right\|} \left(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle\, u_i \right)$$

Démontrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthonormale et que :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$$

Cette méthode, appelée méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, permet en particulier de construire une base orthonormale de E à partir d'une base quelconque de E.

Remarques

a. Le programme officiel précise : « On pourra introduire la méthode d'orthonormalisation de Schmidt [...] mais cette méthode n'est pas exigible ».

b. Il est important de savoir conduire le raisonnement (tenu ici dans la réponse à cet exercice) pour une famille de 3 ou 4 vecteurs et de savoir s'en inspirer pour construire une famille orthogonale.

c. La famille ainsi construite vérifie plus généralement :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$$

d. Ce résultat offre une deuxième méthode de démonstration du théorème 14.27 d'existence d'une base orthonormale.

Théorème 14.28 ▶ Théorème de la base orthonormale incomplète

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille orthonormale de p vecteurs de E (avec $1 \leqslant p < n$), il existe $n-p$ vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E tels que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base orthonormale de E.

Preuve On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Comme la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est orthonormale, elle est libre et F est donc de dimension p. Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $F^\perp$ est alors de dimension $n-p$ et admet une base orthonormale $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ dont les vecteurs sont tous orthogonaux à $e_1, \ldots, e_p$. Finalement, comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc une base orthonormale de E. □

C.3. Coordonnées d'un vecteur en base orthonormale

Les résultats de ce paragraphe sont fondamentaux et expliquent en partie l'intérêt de travailler en base orthonormale.

Théorème 14.29

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien E, alors :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$$

Preuve Soit $x \in E$. Comme la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, il existe une famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de scalaires telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

On a alors, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \langle x, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle$$

et comme la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormale :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \langle x, e_j\rangle = \lambda_j$$

donc finalement :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i$$

□

Remarques **a.** Ainsi, pour écrire x dans une base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, il suffit de calculer les produits scalaires $\langle x, e_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

b. Ce résultat est très important puisqu'il permettra souvent de simplifier les raisonnements et les calculs, notamment grâce à ses conséquences :

Théorème 14.30

Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien E, alors :

i. $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle$

ii. $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2}$

Autrement dit, si x et y sont deux vecteurs de E dont les colonnes des coordonnées respectives dans la base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont X et Y, alors :

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY \quad \text{et} \quad ||x||^2 = {}^tXX$$

Remarque Ainsi, si on connaît les coordonnées de deux vecteurs x et y de E dans une base orthonormale, il est très simple de calculer le produit scalaire $\langle x, y\rangle$.

Exercice 14.7 Démontrer le théorème 14.30.

C.4. Matrices orthogonales, changement de base orthonormale

Définition 14.31

On appelle **matrice orthogonale** toute matrice P inversible telle que : $P^{-1} = {}^tP$.

Proposition 14.32

Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux bases orthonormales de l'espace euclidien E, alors la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une matrice orthogonale.

Remarque Attention, ce résultat n'est pas vrai si les bases sont orthogonales mais pas orthonormales.

Preuve Soit P la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors P^{-1} est la matrice de passage de la base $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. De plus, comme les bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont orthonormales, on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_j, e_i \rangle\, e_i \quad \text{et} \quad e_j = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle\, \varepsilon_i$$

et donc :

$$P = \left(\langle \varepsilon_j, e_i \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \left(\langle e_j, \varepsilon_i \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

et donc, par symétrie du produit scalaire :

$$P^{-1} = {}^tP$$

□

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 14-1

φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$. De plus, la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) &= P(0)\,Q(1) + P(1)\,Q(0) \\ &= Q(0)\,P(1) + Q(1)\,P(0) \\ &= \varphi(Q,P) \end{aligned}$$

donc φ est une forme symétrique sur E^2. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall (P,Q,R) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + Q, R) &= [\lambda P(0) + Q(0)]\,R(1) + [\lambda P(1) + Q(1)]\,R(1) \\ &= \lambda\,[P(0)\,R(1) + P(1)\,R(0)] + [Q(0)\,R(1) + Q(1)\,R(0)] \\ &= \lambda \varphi(P,R) + \varphi(Q,R) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $R \in E$, l'application $P \mapsto \varphi(P,R)$ est linéaire donc, par symétrie, φ est bilinéaire, ce qui prouve finalement que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E^2.

Correction de l'exercice 14-2

i. Par définition, φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2 \ /\ x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n},\ \varphi(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ &= \varphi(y,x) \end{aligned}$$

donc φ est une forme symétrique. Par ailleurs, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de E avec $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $z = (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y, z) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)\, z_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= \lambda \varphi(x,z) + \varphi(y,z) \end{aligned}$$

donc, pour tout $z \in E$, l'application $\varphi(\cdot, z)$ est linéaire sur E et, par symétrie, φ est donc bilinéaire sur E^2. Enfin, pour tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x,x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

et, tous les termes de la somme étant positifs :

$$\begin{aligned}\varphi(x,x)=0 &\Longrightarrow \forall i\in [\![1,n]\!]\,,\ x_i^2=0\\ &\Longrightarrow \forall i\in [\![1,n]\!]\,,\ x_i=0\\ &\Longrightarrow x=0\end{aligned}$$

donc l'application $x\mapsto\varphi(x,x)$ est définie positive et φ est un produit scalaire sur E.

ii. Se démontre exactement comme le point précédent.

iii. Par définition, φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall (f,g)\in E^2,\ \varphi(f,g) &= \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \varphi(g,f)\end{aligned}$$

donc φ est une forme symétrique. Par ailleurs, pour tout triplet (f,g,h) d'éléments de E et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+g,h) &= \int_a^b [\lambda f(t)+g(t)]\,h(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\varphi(f,h)+\varphi(g,h)\end{aligned}$$

donc, pour tout $h\in E$, l'application $\varphi(\cdot,h)$ est linéaire sur E et, par symétrie, φ est donc bilinéaire sur E^2. Enfin, pour tout vecteur f de E, on a :

$$\varphi(f,f)=\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, f^2 étant continue et positive sur $[a,b]$, avec $a<b$, on a d'une part :

$$\varphi(f,f)\geqslant 0$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi(f,f)=0 &\Longrightarrow \forall t\in[a,b]\,,\ f^2(t)=0\\ &\Longrightarrow \forall t\in[a,b]\,,\ f(t)=0\\ &\Longrightarrow f=0\end{aligned}$$

donc l'application $x\mapsto\varphi(x,x)$ est définie positive et φ est un produit scalaire sur E.

Correction de l'exercice 14-3

1. Si $x=0$, la famille (x,y) est liée et on a :

$$\langle x,y\rangle=0\quad\text{et}\quad ||x||\,||y||=0$$

donc l'inégalité et l'égalité sont vraies.

2. ► On peut remarquer que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ P(\lambda)=||x||^2\,\lambda^2+2\,\langle x,y\rangle\,\lambda+||y||^2$$

donc P est effectivement une fonction polynôme, de degré 2 et à coefficients réels. De plus, par définition de P et par positivité de la norme, on a :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ P(\lambda)\geqslant 0$$

Comme P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels, on en déduit que P admet au plus une racine réelle, donc que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$4\,\langle x,y\rangle^2-4\,||x||^2\,||y||^2\leqslant 0$$

et donc :
$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant ||x||^2\,||y||^2$$
et comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$$

► Supposons maintenant que :
$$|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$$
On a alors :
$$4\,\langle x, y\rangle^2 - 4\,||x||^2\,||y||^2 = 0$$
ce qui prouve que P admet une racine réelle α, et alors :
$$||\alpha x + y|| = 0$$
et donc :
$$\alpha x + y = 0$$
ce qui prouve que la famille (x, y) est liée.

► Supposons enfin que la famille (x, y) soit liée. Comme $x \neq 0$, l existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $y = \alpha x$ et alors :
$$|\langle x, y\rangle| = |\alpha\,\langle x, x\rangle| \quad \text{et} \quad ||x||\,||y|| = |\alpha|\,||x||^2$$
et donc :
$$|\langle x, y\rangle| = ||x||\,||y||$$
ce qui achève la preuve.

Correction de l'exercice 14-4

Soit $(x, y) \in E^2$. On a :
$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\,\langle x, y\rangle + ||y||^2$$
donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &\leqslant ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \\ &\leqslant (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$
et donc, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la norme étant positive :
$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

Correction de l'exercice 14-5

◇ Il est évident, compte tenu de la définition, que :
$$F \perp G \Longrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\,,\ f_i \perp g_j$$

◇ Réciproquement, on suppose que :
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\,,\ f_i \perp g_j$$
Soit $(x, y) \in F \times G$. Il existe deux familles $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de réels telles que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{p} y_j g_j$$
et alors, par bilinéarité du produit scalaire :
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j\,\langle x_i, y_j\rangle$$
et par hypothèse :
$$\langle x, y\rangle = 0$$
donc :
$$\forall (x, y) \in F \times G,\ x \perp y$$
c'est-à-dire : $F \perp G$.

Correction de l'exercice 14-6

On pourrait utiliser la famille donnée et vérifier par le calcul qu'il s'agit bien d'une famille orthonormale, mais le plus important est de bien comprendre le mode de construction de ces vecteurs. On montre donc par récurrence que, pour tout k appartenant à $[\![1,p]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(k)$: « il existe une famille orthonormale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ telle que : $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ » est vraie.

- ◇ Pour $k=1$, comme on cherche un vecteur normé tel que $\mathrm{Vect}(u_1)=\mathrm{Vect}(e_1)$ et comme e_1 n'est pas nul, on pose naturellement :
$$u_1=\frac{1}{||e_1||}\,e_1$$
- ◇ Soit $k\in[\![1,p-1]\!]$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et l'on considère une famille orthonormale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ telle que :
$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$$
On a alors :
$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k,e_{k+1})=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k,e_{k+1})$$
et l'on cherche tout d'abord un vecteur v_{k+1} appartenant à $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k,e_{k+1})$, orthogonal aux vecteurs $u_1,\dots,u_k$. Comme ce vecteur a vocation à construire ensuite un vecteur normé, il ne doit pas être nul et ne doit donc pas appartenir à $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ donc on pose :
$$v_{k+1}=e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i$$
On a alors :
$$\begin{aligned}\forall j\in[\![1,k]\!]\,,\ v_{k+1}\perp u_j&\Longleftrightarrow\forall j\in[\![1,k]\!]\,,\ \langle v_{k+1},u_j\rangle=0\\&\Longleftrightarrow\forall j\in[\![1,k]\!]\,,\ \langle e_{k+1},u_j\rangle+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\langle u_i,u_j\rangle=0\end{aligned}$$
et comme la famille $(u_1,\dots,u_k)$ est orthonormale :
$$\begin{aligned}\forall j\in[\![1,k]\!]\,,\ v_{k+1}\perp u_j&\Longleftrightarrow\forall j\in[\![1,k]\!]\,,\ \langle e_{k+1},u_j\rangle+\lambda_j=0\\&\Longleftrightarrow\forall j\in[\![1,p]\!]\,,\ \lambda_j=-\langle e_{k+1},u_j\rangle\end{aligned}$$
On pose alors :
$$v_{k+1}=e_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1},u_i\rangle\,u_i$$
Comme la famille $(u_1,\dots,u_k,e_{k+1})$ est libre, v_{k+1} n'est pas le vecteur nul (sinon la composante de e_{k+1} serait nulle, ce qui n'est pas le cas), donc on peut maintenant poser :
$$u_{k+1}=\frac{1}{||u_{k+1}||}\,u_{k+1}$$
Par construction, la famille $(u_1,\dots,u_k,u_{k+1})$ est alors une famille orthonormale (donc libre) formée de $k+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})$ (qui est de dimension $k+1$) donc :
$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{k+1})$$
et : $\mathscr{P}(k)\Longrightarrow\mathscr{P}(k+1)$.
- ◇ Finalement, $\mathscr{P}(k)$ est donc vraie pour tout $k\in[\![1,p]\!]$.

Correction de l'exercice 14-7

- ▶ Soit $(x,y)\in E^2$. Comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E, on a :
$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\,e_i\quad\text{et}\quad y=\sum_{j=1}^{n}\langle y,e_j\rangle\,e_j$$

et alors, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle$$

et comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle$$

► En prenant $y = x$ dans le résultat précédent, on obtient :

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$$

ce qui prouve le résultat attendu.

E. Pour aller plus loin

Preuve de la proposition 14.27

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « tout espace euclidien de dimension n possède une base orthonormale » est vraie.

- Pour $n = 1$. Soit E un espace euclidien de dimension 1. Il existe alors un vecteur x non nul de E et le vecteur $y = \dfrac{x}{||x||}$ est alors un vecteur normé de E, qui de dimension 1, donc (y) est une base orthonormale de E et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit alors E un espace euclidien de dimension $n+1$. De même que dans le point précédent, on peut choisir un vecteur e_{n+1} normé appartenant à E. On note alors :
$$F = \mathrm{Vect}(e_{n+1})$$
D'après 14.24, F et $F^\perp$ sont alors supplémentaires dans E donc, comme E est de dimension $n+1$ et F est de dimension 1 :
$$\dim(F) = n$$
Par hypothèse de récurrence, F possède alors une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ et, comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est une base de E, vérifiant :
$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\,,\ i \neq j \Longrightarrow e_i \perp e_j \\ \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ e_i \perp e_{n+1} \end{cases}$$
donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E dont les vecteurs sont tous normés, ce qui prouve alors que : $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
- Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve de la proposition 14.24

Comme F et $F^\perp$ sont orthogonaux, ils sont en somme directe. Il en découle, en notant p la dimension de F, que :

$$\dim(F^\perp) \leqslant n - p$$

Montrons alors que $F^\perp$ est de dimension $n - p$. Si $p = 0$, $F = \{0\}$ et de manière immédiate $F^\perp = E$ est de dimension n. On suppose maintenant que p n'est pas nul et on note $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de F. D'après 14.21, on a :

$$F^\perp = \{x \in E \ / \ \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ x \perp e_i\}$$

Si l'on considère l'application $f : x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{1\leqslant i\leqslant p}$, la bilinéarité du produit scalaire et les propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ nous permettent alors de prouver que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^p$ et que :

$$F^\perp = \mathrm{Ker}(f)$$

Comme E est de dimension finie, on en déduit, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f))\\ &= n - \dim(\mathrm{Im}(f))\end{aligned}$$

et alors, comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^p$ et comme $\mathbb{R}^p$ est de dimension p :

$$\dim(F^\perp) \geqslant n - p$$

ce qui nous permet finalement d'affirmer :

$$\dim(F^\perp) = n - p$$

et donc :

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$$

et donc, comme F et $F^\perp$ sont en somme directe :

$$F \oplus F^\perp = E$$

Sommaire