13 Diagonalisation

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie pouvait être représenté matriciellement et que cette caractérisation matricielle pouvait, dans certains cas, simplifier l'étude.
Nous en venons désormais à nous demander dans quelle mesure il est possible de simplifier encore cette étude, en choisissant une base dans laquelle la matrice associée à f serait la plus simple possible. Plus précisément, le but de ce chapitre est d'étudier à quelles conditions un endomorphisme peut être représenté par une matrice diagonale.

A. Réduction des endomorphismes

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension finie, distinct de $\{0\}$ et f est un endomorphisme de E.

A.1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme

Définition 13.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. On dit que λ est **valeur propre** de f s'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que : $f(x) = \lambda x$.

ii. Si λ est valeur propre de f, on appelle **vecteur propre** de f associé à λ tout vecteur x **non nul** tel que : $f(x) = \lambda x$.

iii. Si λ est valeur propre de f, l'ensemble $E_\lambda(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = \lambda x\}$ est appelé **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ.

iv. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarques

a. Ne pas oublier la condition $x \neq 0_E$ dans les deux premiers points de la définition : un vecteur propre est toujours non nul.

b. Attention, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ n'est pas exactement l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, puisqu'il contient le vecteur nul. En fait, ce sous-espace propre est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille des vecteurs propres associés à λ : c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

c. On verra en exercice qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel peut n'avoir aucune valeur propre. En revanche, si x est un vecteur propre de f, il est associé à une unique valeur propre.

Proposition 13.2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif et, dans ce cas, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 13.1 Démontrer la proposition 13.2.

Remarques

a. Comme E est de dimension finie, on peut également dire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif.

b. En particulier, f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

Proposition 13.3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est valeur propre de f alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de f^k et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^k}(f^k)$$

Plus généralement, si Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ et si λ est valeur propre de f, alors $Q(\lambda)$ est valeur propre de $Q(f)$ et :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x \Longrightarrow Q(f)(x) = Q(\lambda)\,x$$

Remarque Il arrive que la preuve de cette proposition soit demandée aux concours, donc il est essentiel de bien la maîtriser.

Preuve

- On considère un vecteur x de E tel que : $f(x) = \lambda x$. Montrons alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(k)$: « $f^k(x) = \lambda^k x$ » est vraie.
  - Avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, on a : $f^0(x) = x = \lambda^0 x$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. On a alors, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= f(f^k(x)) \\ &= f(\lambda^k x) \\ &= \lambda^k f(x) \\ &= \lambda^{k+1} x \end{aligned}$$

    donc : $\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$.
  - Ainsi, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- En particulier, le résultat précédent permet d'affirmer que, si λ est valeur propre de f, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de f^k et que :

$$E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^k}(f^k)$$

- Soit $x \in E$ tel que : $f(x) = \lambda x$. Soit Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_q$ tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ Q(y) = \sum_{k=0}^{q} a_k y^k$$

  et alors, d'après le résultat précédent et comme $f(x) = \lambda x$:

$$\begin{aligned} Q(f)(x) &= \sum_{k=0}^{q} a_k f^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k \lambda^k \cdot x \\ &= Q(\lambda)\,x \end{aligned}$$

  En particulier, on en déduit que, si λ est valeur propre de f, alors $Q(\lambda)$ est valeur propre de $Q(f)$ et :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x \Longrightarrow Q(f)(x) = Q(\lambda)\,x$$

□

A.2. Lien entre valeurs propres et polynôme annulateurs

Théorème 13.4

Si P est un polynôme annulateur de f, alors les racines de P sont les seules valeurs propres possibles de f ; autrement dit :

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(\lambda) = 0\}$$

Exercice 13.2 Démontrer la proposition 13.4.

Exercice 13.3 Soit p un projecteur de E. Déterminer les valeurs propres de p et préciser leurs sous-espaces propres associés.

Remarques

a. Attention, les racines d'un polynôme annulateur de f ne sont pas nécessairement valeur propre de f. Par exemple, le polynôme $x \mapsto x^2 - x$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme nul de E, mais 1 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme nul.

b. Cette propriété est souvent très utile pour limiter l'étude de certains cas dans la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme, la méthode générale consistant à chercher les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

A.3. Propriétés des sous-espaces propres d'un endomorphismes

Proposition 13.5

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f, alors leurs sous-espaces propres associés sont en somme directe ; autrement dit :

$$E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$$

En particulier, pour tout couple (λ, μ) de valeurs propres distinctes de f :

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$$

Remarques

a. Cette proposition sera démontrée dans la partie « Pour aller plus loin ».

b. On en déduit de manière immédiate les résultats suivants :

Proposition 13.6

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de f, si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{F}_i$ est une famille libre de vecteurs de $E_{\lambda_i}(f)$, alors la concaténation des familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ est libre.
En particulier, si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de f associés à p valeurs propres distinctes, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Proposition 13.7

Si E est de dimension n, tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes.

Remarque Dans tout le cours, on n'envisage que le cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, qui admettent donc nécessairement un nombre fini de valeurs propres. Cependant, si E est de dimension infinie, un endomorphisme de E peut admettre une infinité de valeurs propres (en conservant les mêmes définitions). C'est le cas par exemple de l'endomorphisme $d : f \mapsto f'$ sur l'espace vectoriel E des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: tous les réels sont valeur propre de d puisque, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ vérifie :

$$f_\lambda \in E, \quad f_\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad d(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$$

A.4. Endomorphismes diagonalisables

Dans l'ensemble de ce paragraphe, on suppose que E est de dimension n non nulle.

Définition 13.8

On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exemples 13.1

a. L'endomorphisme identique de E est diagonalisable puisque sa matrice relative à une base quelconque de E est I_n, donc diagonale.

b. Plus généralement, une homothétie (*i.e.* un endomorphisme non nul de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$) est diagonalisable puisque sa matrice relative à une base quelconque de E est λI_n, donc diagonale.

c. $\varphi : P \mapsto P + (X-1)\,P'$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_2[x]$ (X désigne ici le polynôme $x \mapsto x$). En effet, on peut remarquer que :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X-1) = 2\,(X-1) \quad \text{et} \quad \varphi((X-1)^2) = 3\,(X-1)^2$$

De plus, la famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ est libre (car échelonnée en degrés) et formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$, qui est un espace vectoriel de dimension 3, donc $(1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, relativement à laquelle la matrice associée à φ est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.9

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f est diagonalisable,

ii. il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f,

iii. $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E$,

iv. $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$,

v. la concaténation de bases respectives de $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_p}(f)$ est une base de E.

Remarques

a. Pour démontrer qu'un endomorphisme est diagonalisable, on utilise le plus souvent les points *iv* et *ii*.

b. Si p est un projecteur de E différent de 0 et de Id_E, on a vu que ses valeurs propres sont 0 et 1 et que leurs sous-espaces propres associés respectifs sont $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Mais on sait par ailleurs que :

$$\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$$

donc p est diagonalisable.

Preuve

($i \Longrightarrow ii$) Supposons que f soit diagonalisable. Il existe alors une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E relativement à laquelle la matrice D associée à f soit diagonale. En notant alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(x_i) = \lambda_i x_i$$

Par conséquent, comme $x_1, \dots, x_n$ sont tous non nuls (ce sont des vecteurs d'une base), ce sont des vecteurs propres de f et il existe bien une base de E formée de vecteurs propres de f.

($ii \Longrightarrow iii$) Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. On note alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et :

$$F = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$$

Comme les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont tous des vecteurs propres de f, ils appartiennent tous à F donc, comme $\mathcal{B}$ es tune famille libre de n vecteurs :

$$\dim(F) \geqslant n$$

et comme F est un sous-espace vectoriel de E (qui est de dimension n) :

$$\dim(F) = \dim(E) \quad \text{et} \quad F \subset E$$

donc : $F = E$.

($iii \Longrightarrow iv$) Immédiat.

($iv \Longrightarrow v$) Supposons que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$. Comme les sous-espaces propres de f sont en somme directe, on a alors :

$$E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E$$

donc la concaténation de bases respectives de $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$ est une base de E.

($v \Longrightarrow i$) Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E obtenue par concaténation de bases respectives de $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i appartient alors à un sous-espace propre de f et il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x_i) = \lambda_i x_i$$

et la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que f est diagonalisable.

□

Exercice 13.4 Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f admet une unique valeur propre λ. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Proposition 13.10

On rappelle que E est de dimension n.
Pour que f soit diagonalisable, il **suffit** qu'il admette n valeurs propres distinctes.
De plus, si f admet n valeurs propres distinctes, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

Exercice 13.5 Démontrer la proposition 13.10.

Remarque Attention, il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et un endomorphisme de E peut être diagonalisable sans avoir n valeurs propres distinctes.

B. Réduction des matrices carrées

Dans l'ensemble de ce paragraphe, on envisage une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La plupart des résultats étant analogues à ceux énoncés pour les endomorphismes, on se reportera au paragraphe précédent pour leur démonstration.

B.1. Élements propres d'une matrice carrée

Définition 13.11

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. On dit que λ est **valeur propre** de A s'il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.

ii. Si λ est valeur propre de A, on appelle **vecteur propre** de A associé à λ tout vecteur X **non nul** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.

iii. Si λ est valeur propre de A, l'ensemble $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$ est appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

iv. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Remarques

a. Attention à ne pas oublier la condition $X \neq 0$ dans les deux premiers points de la définition : un vecteur propre est toujours non nul.

b. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ n'est pas exactement l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, puisqu'il contient le vecteur nul ; c'est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par la famille des vecteurs propres associés à λ, *i.e.* le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ contenant tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

c. On verra en exercice qu'une matrice carrée peut ne pas avoir de valeur propre.

Proposition 13.12

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Remarques

a. En particulier, 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

b. Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss et triangulariser la matrice $A - \lambda I_n$. Les valeurs propres de A sont les valeurs de λ pour lesquelles *l'un au moins des coefficients diagonaux d'une réduit de Gauss* de $A - \lambda I_n$ est nul.

Proposition 13.13

Si T est une **matrice triangulaire**, les valeurs propres de T sont ses coefficients diagonaux.

Remarque Attention, ce résultat n'est vrai que pour une matrice triangulaire et les coefficients diagonaux d'une matrice M quelconque ne sont en général pas valeur propre de M.

Exercice 13.6 Démontrer la proposition 13.13.

Exercice 13.7 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.14

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est valeur propre de A alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^k}(A^k)$$

Plus généralement, si Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ et si λ est valeur propre de A, alors $Q(\lambda)$ est valeur propre de $Q(A)$ et :

$$\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X \Longrightarrow Q(A)X = Q(\lambda)\,X$$

B.2. Lien entre valeurs propres et polynôme annulateur

Proposition 13.15

Si P est un polynôme annulateur de A, alors les racines de P sont les seules valeurs propres possibles de A ; autrement dit :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(\lambda) = 0\}$$

Exemples 13.2

a. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que : $A^2 = I$, donc $x \mapsto x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de A. De plus, on a :

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc -1 et 1 sont effectivement valeur propre de A.

b. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que $B^2 = -I$. Ainsi, $x \mapsto x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de B, qui n'a pas de racine réelle. B n'admet donc pas de valeur propre réelle.

Remarques

a. Attention, de même que pour les endomorphismes, les racines d'un polynôme annulateur de A ne sont pas nécessairement valeur propre de A. Par exemple, le polynôme $x \mapsto x^2 - x$ est un polynôme annulateur de la matrice I_n, mais 0 n'est pas valeur propre de I_n.

b. Cette propriété est souvent très utile pour limiter l'étude de certains cas dans la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme, la méthode générale consistant à chercher les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

B.3. Propriétés des sous-espaces propres d'une matrice carrée

Proposition 13.16

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{R}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont valeurs propres de A, alors leurs sous-espaces propres associés sont en somme directe ; autrement dit :

$$E_{\lambda_1}(A) + \cdots + E_{\lambda_p}(A) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(A)$$

En particulier, pour tout couple (λ, μ) de valeurs propres distinctes de A :

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_E\}$$

Proposition 13.17

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de A, si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{F}_i$ est une famille libre de vecteurs de $E_{\lambda_i}(A)$, alors la concaténation des familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$ est libre.
En particulier, si $X_1, \ldots, X_p$ sont des vecteurs propres de A associés à p valeurs propres distinctes, alors la famille $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre.

Proposition 13.18

Si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet au plus n valeurs propres distinctes.

B.4. Matrices diagonalisables

Définition 13.19

On dit que A est **diagonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui lui soit semblable.

Proposition 13.20

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. A est diagonalisable,

ii. il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A,

iii. $E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

iv. $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$,

v. la concaténation de bases respectives de $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque Pour démontrer qu'une matrice est diagonalisable, on utilise le plus souvent les points *iv* et *ii*.

Exercice 13.8 Les matrices A et B suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.21

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour que A soit diagonalisable, il **suffit** qu'elle admette n valeurs propres distinctes.
De plus, si A admet n valeurs propres distinctes, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

Exemples 13.3 **a.** Toute matrice diagonale est diagonalisable.

b. On a vu que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle, donc elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque Attention, il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et une matrice carrée d'ordre n peut être diagonalisable sans avoir n valeurs propres distinctes.

B.5. Liens entre les éléments propres d'un endomorphisme et de sa matrice associée dans une base

Proposition 13.22

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, f un endomorphisme de E et A la matrice associée à f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

i. f et A ont les mêmes valeurs propres,

ii. si x est un vecteur de E et si X est la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, alors x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

iii. f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Preuve

◇ Soit x est un vecteur de E et X est la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Comme A est la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$, AX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lambda x \iff AX = \lambda X$$

Par ailleurs, n'est pas le vecteur nul si et seulement si X n'est pas nul, ce qui prouve les points i et ii.

◇ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. L'application qui à un vecteur x de $E_\lambda(f)$ associe la colonne X de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $E_\lambda(f)$ sur $E_\lambda(A)$ donc :

$$\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_\lambda(A))$$

et donc, comme f et A ont les mêmes valeurs propres :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))$$

d'où :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$$

ce qui prouve que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

□

Remarque Compte tenu de cette proposition, pour déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme f de E, on peut donc chercher les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice représentative de f dans une base de E.

Exercice 13.9 On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice représentative dans la base canonique de E est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Déterminer les sous-espaces propres de f.
3. f est-il diagonalisable ?

Proposition 13.23

Si A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et diagonalisable, si $\mathcal{B} = (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Plus précisément, si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i, alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Preuve On suppose que A est diagonalisable et on considère une base $\mathcal{B} = (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.
On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice A. D'après 13.22, f est diagonalisable et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$, la proposition (12.4) permet de conclure. □

Exercice 13.10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale puis déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

B.6. Application au calcul des puissances d'une matrice carrée

Proposition 13.24

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable. On considère une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et on note :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1} \quad \text{où : } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Remarque Ce résultat se démontre de manière immédiate par récurrence, mais on peut également remarquer que, si A est la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ et si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et D^k sont les matrices associées à f^k respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, ce qui prouve que $D^k = P^{-1}A^kP$.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 13-1

On note :

$$E_\lambda = \{x \in E \ / \ f(x) = \lambda x\}$$

λ est valeur propre de f si et seulement si E_λ n'est pas égal à $\{0_E\}$ et, dans ce cas, c'est le sous-espace propre de f associé à λ. De plus, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{x \in E \ / \ f(x) - \lambda x = 0\} \\ &= \{x \in E \ / \ (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0\} \\ &= \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \end{aligned}$$

Par conséquent, si λ est valeur propre de f, alors son sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et λ est valeur propre de f si et seulement si $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$ donc si et seulement si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif.

Correction de l'exercice 13-2

Soient P un polynôme annulateur de f et λ une valeur propre de f. Il existe un vecteur x non nul de E tel que : $f(x) = \lambda x$ et alors :

$$Q(f)(x) = Q(\lambda)\, x$$

et comme $Q(f) = 0$:

$$Q(\lambda)\, x = 0$$

et comme $x \neq 0$:

$$Q(\lambda) = 0$$

Correction de l'exercice 13-3

Comme p est un projecteur de E, on a : $p^2 = p$, donc $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p et :

$$\operatorname{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$$

De plus, comme p est un projecteur de E, on sait que :

$$\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im}(p)$$

On en déduit que :

- si $p = 0$, $\operatorname{Ker}(p) = E$ et $\operatorname{Im}(p) = \{0\}$ et 0 est l'unique valeur propre de p, son sous-espace propre associé étant E,
- si $p = \operatorname{Id}_E$, alors $\operatorname{Ker}(p) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(p) = E$ et 1 est l'unique valeur propre de p, son sous-espace propre associé étant E,
- si $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$, alors 0 et 1 sont les valeurs propres de p, leurs sous-espaces propres associés respectifs étant $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$.

Correction de l'exercice 13-4

◇ Si $f = \lambda \operatorname{Id}_E$, la matrice associée à f dans une base quelconque de E est égale à λI, donc diagonale et f est diagonalisable.

◇ Si f est diagonalisable alors, comme λ est l'unique valeur propre de f, on a :

$$E_\lambda(f) = E$$

donc :

$$\forall x \in E, \ f(x) = \lambda x$$

c'est-à-dire : $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Correction de l'exercice 13-5

On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Il existe alors n vecteurs propres $x_1, \ldots, x_n$ de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
D'après 13.6, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est alors une famille libre, formée de n vecteurs de E donc, comme E est de dimension n, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable.
De plus, on sait que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \dim(E_{\lambda_i}(f)) \geqslant 1$$

et comme f est diagonalisable :

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n$$

d'où :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$$

Correction de l'exercice 13-6

Soit T une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $t_1, \ldots, t_n$ les coefficients diagonaux de T.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de T si et seulement si $T - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $T - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $t_1 - \lambda, \ldots, t_n - \lambda$ et on sait qu'une matricde triangulaire n'est pas inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit que λ est valeur propre de T si et seulement s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $t_i - \lambda = 0$, donc tel que $\lambda = t_i$.

Correction de l'exercice 13-7

◇ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Or on a :

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ \det(A - \lambda I_2) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R},\ (2-\lambda)(4-\lambda) = 0\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de A sont 2 et 4. De plus, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff (A - 2I_2)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Enfin on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} AX = 4X &\iff (A - 4I_2)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff -x - y = 0 \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 4 est :

$$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

◇ La matrice B est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi on a :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}$$

De plus on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} BX = X &\iff (B - I_2)\, X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff y = z = 0 \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Enfin on a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} BX = 2X &\iff (B - 2I_2)\, X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 2 est :

$$E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Correction de l'exercice 13-8

◇ On a vu dans l'exercice 11.12 que A possède deux valeurs propres, 2 et 4, et que leurs sous-espaces propres associés sont de dimension 1. On a donc :

$$\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 2 = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$$

ce qui prouve que A est diagonalisable.

◇ De même, 1 et 2 sont les seules valeurs propres de B et on a :

$$\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 2 \neq \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

ce qui prouve que B n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 13-9

On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice représentative dans la base canonique de E est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On sait que les valeurs propres de f sont les valeurs propres de B. Or B est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi on a :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$$

2. On a vu dans l'exercice 11.12 que les sous-espaces propres de B sont :

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Comme B est la matrice représentative de f dans la base canonique (e_0, e_1, e_2) de $\mathbb{R}_2[x]$, on en déduit que les sous-espaces propres de f sont :

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}(e_0) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_0 + e_2)$$

3. On a donc :

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_2(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}_2[x])$$

donc f n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 13-10

On a vu dans l'exercice 11.13 que A est diagonalisable, donc il une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
De plus on a vu dans l'exercice 11.12 que les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que leurs sous-espaces propres associés respectifs sont :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (c'est la concaténation de bases des sous-espaces propres de A), donc que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$$

Sommaire