12 Compléments d'algèbre linéaire

ECG Maths Approfondies
Semestre 3

A. Changement de base

On a vu dans les chapitres précédents qu'un vecteur (respectivement une application linéaire) peut être caractérisé par ses coordonnées (respectivement par sa matrice représentative) dans une base (respectivement un couple de bases).
On peut cependant se demander ce qu'il advient si l'on change les bases considérées. Ainsi, étant donné un vecteur x d'un espace vectoriel E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, existe-t-il un lien entre les coordonnées respectives de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
Le but de ce paragraphe est de répondre à cette question.

A.1. Matrice de passage

Définition 12.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux bases de E.
Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de ε_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que l'on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} e_i$$

La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est appelée **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

Remarques

a. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de passage de $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donc obtenue en écrivant en colonne les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & & & \varepsilon_j & & \varepsilon_n & \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,j} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{i,j} & \cdots & \alpha_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{n,j} & \cdots & \alpha_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

b. Pour faire le lien avec le chapitre précédent, on peut remarquer que la matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la matrice représentative dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme f de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ f(e_i) = \varepsilon_i$$

c. On peut également remarquer que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \operatorname{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \operatorname{Id}_E$, mais on prendra garde à l'ordre des bases.

Exemple 12.1 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x+1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

La famille $\mathcal{C}$ est une base de E (elle est libre car échelonnée en degrés et formée de trois vecteurs non nuls de E, qui est de dimension 3). La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition 12.2

Soit E un espace vectoriel de dimension non nulle. Si $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ de E, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

Preuve On a remarqué précédemment que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de l'endomorphisme identique de E relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Comme Id_E est un automorphisme de E, on en déduit que P est inversible et que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E^{-1)} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

ce qui prouve le résultat. □

Exercice 12.1 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

On a vu que $\mathcal{C}$ est une base de E et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Justifier que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et expliciter $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$.

A.2. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 12.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
Pour tout vecteur x de E, en notant $X_\mathcal{B}$ la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $X_\mathcal{C}$ la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$, on a :

$$X_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_\mathcal{C}$$

Preuve On suppose que $\dim(E) = n$ et on note :

$$\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n},\ \mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, X_\mathcal{B} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n},\ X_\mathcal{C} = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

On a alors :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j \varepsilon_j$$

donc :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j \right) e_i \end{aligned}$$

d'où, par unicité des coefficients de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j$$

soit finalement : $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}$.

□

Remarque Compte tenu de cette formule, si l'on connaît les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et que l'on cherche ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$, il faudra donc déterminer la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et utiliser la formule : $X_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} X_{\mathcal{B}}$.
On peut aussi résoudre l'équation $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}$, d'inconnue $X_{\mathcal{C}}$.

Exercice 12.2 On note $E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ la base de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 2x, \quad P_1(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = 8x^2 - 3x + 3$$

Remarque En pratique, on se sert assez peu de cette proposition, mais elle est très importante pour le point suivant.

A.3. Changement de base et matrice représentative d'un endomorphisme

Théorème 12.4

Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et f un endomorphisme de E.
En notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

Preuve Soit x un élément de E. On note $X_{\mathcal{B}}$ et $Y_{\mathcal{B}}$ (respectivement $X_{\mathcal{C}}$ et $Y_{\mathcal{C}}$) les colonnes des coordonnées respectives de x et y dans $\mathcal{B}$ (respectivement dans $\mathcal{C}$). On note $M_{\mathcal{B}}$ (resp. $M_{\mathcal{C}}$) la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). On a donc :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad Y_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} Y_{\mathcal{C}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} &= Y_{\mathcal{C}} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} Y_{\mathcal{B}} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ M_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}} \\ &= P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\ M_{\mathcal{B}}\ P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Comme ce résultat est valable pour tout vecteur x de E, on en déduit, par unicité de la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\, M_{\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

□

Remarque Si l'on se souvient des propriétés du produit matriciel (et notamment de l'interprétation en terme de produit des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice), on peut assez bien retenir cette formule en remarquant que la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}$ associée à f dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est obtenue en écrivant, en colonne, les coordonnées de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et que :

- changer la base de l'espace vectoriel de départ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ consiste à modifier les vecteurs colonnes de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}$ donc à multiplier à droite par $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$,
- changer la base de l'espace vectoriel d'arrivée de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ consiste à modifier les vecteurs lignes de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}$ donc à multiplier à gauche par $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

A.4. Matrices semblables

Définition 12.5

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exercice 12.3 Soit A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.

Proposition 12.6

Soient E un espace vectoriel de dimension n, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A et B sont semblables si et seulement s'il existe un endomorphisme f de E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telles que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$$

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de 12.4.

Proposition 12.7

Deux matrices semblables ont le même rang.

Exercice 12.4 Démontrer la proposition 12.7.

B. Trace d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 12.8

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace** de M le scalaire noté $\mathrm{Tr}(M)$ défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

$\mathrm{Tr}(M)$ est donc la somme des coefficients diagonaux de M.

Proposition 12.9

Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout scalaire λ appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Tr}(M+N) = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(\lambda M) = \lambda \,\mathrm{Tr}(M)$$

On dit que Tr est une application linéaire.

Exercice 12.5 Démontrer la proposition 12.9.

Proposition 12.10

Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$$

Proposition 12.11

Pour toute matrice M et pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(M)$$

Exercice 12.6
1. Prouver la proposition 12.10.
2. Démontrer la proposition 12.11.

Proposition 12.12

Deux matrices semblables ont la même trace.

Exercice 12.7 Démontrer la proposition 12.12.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 12-1

$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, donc elle est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \\ x = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot (x+1) \\ x^2 = -\frac{5}{8} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (x+1) + \frac{1}{4} \cdot (4x^2 - 2x + 3) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{2} \cdot P_0 \\ e_1 = -\frac{1}{2} \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 \\ e_2 = -\frac{5}{8} \cdot P_0 + \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{4} \cdot P_2 \end{cases}$$

et donc :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 12-2

La colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

De plus, en notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a vu dans l'exercice 11.1 que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et alors :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$R = -2 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2$$

Correction de l'exercice 12-3

On suppose d'une part que A et B sont semblables, et d'autre part que B et C sont semblables. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$A = PBP^{-1} \quad \text{et} \quad B = QCQ^{-1}$$

donc on a :

$$\begin{aligned} A &= P\left(QCQ^{-1}\right)P^{-1} \\ &= (PQ)C\,(PQ)^{-1} \\ &= RCR^{-1} \end{aligned}$$

où l'on a posé : $R = PQ$. Ainsi A et C sont semblables.

Correction de l'exercice 12-4

Soit A et B deux matrices semblables appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$, de telle sorte que l'on a :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$$

Comme A et B sont semblables, il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ relativement à laquelle la matrice associée à f est B et on a donc :

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(f)$$

et donc :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$$

Correction de l'exercice 12-5

- Soient $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors :

  $$M + N = (m_{i,j} + n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

  donc :

  $$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M+N) &= \sum_{i=1}^{n} (m_{i,i} + n_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} n_{i,i}) \end{aligned}$$

  et donc :

  $$\boxed{\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2\,,\ \operatorname{Tr}(M+N) = \operatorname{Tr}(M) + \operatorname{Tr}(N)}$$

► Soient $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\lambda M = (\lambda m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\lambda M) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda m_{i,i}\\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \operatorname{Tr}(\lambda M) = \lambda \operatorname{Tr}(M)}$$

Correction de l'exercice 12-6

1. On note :

$$M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

de sorte que l'on a :

$$MN = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad NM = \left(\sum_{k=1}^{n} n_{i,k} m_{k,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

et donc :

$$\operatorname{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, n_{k,i} \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}\, m_{k,i}$$

On a donc :

$$\operatorname{Tr}(MN) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i}\, m_{i,k}$$

et comme les indices k et i sont muets :

$$\operatorname{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}\, m_{k,i}$$

donc :

$$\boxed{\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)}$$

2. Soient M une matrice et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En substituant $P^{-1}M$ à M et P à N dans le résultat précédent, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(P^{-1}MP) &= \operatorname{Tr}\big((P^{-1}M)P\big)\\ &= \operatorname{Tr}\big(P(P^{-1}M)\big)\\ &= \operatorname{Tr}\big((PP^{-1})M\big)\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr}(P^{-1}MP) = \operatorname{Tr}(M)}$$

Correction de l'exercice 12-7

Soit A et B deux matrices semblables. Il existe donc une matrice P inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Or on sait que :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$$

donc, avec $M = P$ et $N = BP^{-1}$:

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}((BP^{-1})P) = \operatorname{Tr}(B)$$

Sommaire