11 Applications linéaires

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

Dans tout ce chapitre, E et F désigne deux espaces vectoriels et (n, p) est un couple d'entiers naturels non nuls.

A. Généralités

A.1. Définitions et propriétés

Définition 11.1

On dit qu'une application f de E dans F est linéaire si elle vérifie :

i. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemples 11.1

a. Si $E = F$, l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ est une application linéaire de E dans E, appelée **identité** de E. Elle est aussi souvent notée Id s'il n'y a pas de risque de confusion quant à l'ensemble de définition.

b. Plus généralement, si $E = F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}$ est une application linéaire de E dans E, souvent appelée homothétie vectorielle.

Proposition 11.2

Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$f(0_E) = 0_F \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$$

Remarques

a. Il s'agit de résultats importants, à bien retenir.

b. Ces résultats sont des conséquences immédiates de la définition (avec $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$) et des propriétés fondamentales des calculs dans un espace vectoriel.

Proposition 11.3

Soit f une application de E dans F.

i. f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

ii. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n,\ \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque

En pratique, pour démontrer qu'une application est linéaire, on utilisera le plus souvent le premier point de cette proposition, et non la définition.

Preuve *i.* ◇ Supposons que f soit linéaire. On a alors :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v) \tag{11.1}$$

et :

$$\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \tag{11.2}$$

En utilisant (11.1), on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$$

puis, en utilisant (11.2) :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \tag{11.3}$$

En prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et par ailleurs, en prenant $y = 0_E$ dans (11.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) &= f(\lambda x + 0_E) \\ &= \lambda f(x) + f(0_E) \\ &= \lambda f(x) + 0_F \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

ii. Se déduit du point i par récurrence.

□

Exercice 11.1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

Montrer que f est une application linéaire.

Définition 11.4

On appelle :

i. **endomorphisme** de E toute application linéaire f de E dans E,

ii. **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F,

iii. **automorphisme** de E tout endomorphisme bijectif de E,

iv. **forme linéaire** de E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

A.2. Structure de l'ensemble des applications linéaires

Proposition 11.5

i. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.

ii. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un espace vectoriel.

iii. Si f est une application linéaire de E dans F et si g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Exercice 11.2 Démontrer la proposition 11.5.

Remarque Attention, l'ensemble des isomorphismes de E dans F n'est pas un espace vectoriel. En effet, il n'est pas stable par combinaison linéaire puisque, si f est un isomorphisme de E dans F, c'est aussi le cas de $-f$, mais pas de $f - f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$, qui n'est pas bijective de E dans F si $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$.

Définition 11.6

On dit que deux endomorphismes f et g de E commutent si : $f \circ g = g \circ f$.

Proposition 11.7

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Exercice 11.3 Démontrer la proposition 11.7.

Proposition 11.8

Soient f, g et h des endomorphismes de E. On a :

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h \quad \text{et} \quad f \circ (g+h) = f \circ g + g \circ h$$

Remarque Ces deux résultats se démontrent de manière immédiate, le premier à l'aide de la définition de la composition et de la somme de deux applications (linéaires ou non), la seconde à l'aide de la définition de la composition et de la linéarité de f.

A.3. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 11.9

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle :

i. noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$,

ii. image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$.

Remarques

a. D'après la proposition 11.2, le noyau d'une application linéaire f de E dans F n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul de l'espace vectoriel E.
Lorsque $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, on dit que le noyau de f est « réduit au vecteur nul ».

b. Bien retenir que, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}(f)$ est formé d'éléments de E, tandis que $\mathrm{Im}(f)$ est formé d'éléments de F.

Exercice 11.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_1 + 4x_2)$$

On a vu que f est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Proposition 11.10

Soit f une application linéaire de E dans F.

i. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

ii. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 11.5 Démontrer la proposition 11.10.

Proposition 11.11

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie et si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$; autrement dit :

$$E = \mathrm{Vect}((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n})$$

Exercice 11.6 Démontrer la proposition 11.11.

Théorème 11.12

Si E est de dimension finie non nulle admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est et si f est une application linéaire de E dans F, alors f est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Plus précisément, si f et g sont deux applications linéaires de E dans F telles que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors : $f = g$.

Preuve

◇ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$ connues.
Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et alors, comme f est linéaire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

donc la connaissance de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ assure la connaissance de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

◇ Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) = g(e_i). \tag{11.4}$$

Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et alors, comme f et g sont linéaires :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)$$

et donc, d'après (11.4) :

$$f(x) = g(x)$$

donc, cette égalité étant valable pour tout $x \in E$: $f = g$.

□

A.4. Théorème du rang

Théorème 11.13 ▶ Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimensions finies et :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

L'entier $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est alors appelé rang de f et noté $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 11.7 On se propose de démontrer le théorème 11.13. On suppose que f est une application linéaire de E dans F et que E est de dimension finie.

1. Traiter le cas où $\dim(E) = 0$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension finie n non nulle.
   (a) Justifier que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimensions finies. On note p la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Traiter le cas $p = n$.
   (c) On suppose désormais que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension p différente de 0 et de n. Justifier l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Prouver que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre.
   (e) Conclure dans le cas où p n'est pas nul.
   (f) Traiter le cas $p = 0$.

Remarques

a. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie, on a toujours : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ (puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F).

b. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie, on a toujours : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ (en application de 11.11).

Proposition 11.14

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie et non nulle. Soit H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Remarque Cette proposition sera démontrée dans la section « Pour aller plus loin ».

A.5. Sous-espaces stables

Définition 11.15

Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est **stable** par f (ou que f stabilise F) si $f(F)$ est inclus dans F, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F,\ f(x) \in F$$

Exercice 11.8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.

Proposition 11.16

Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par f, la restriction $\widehat{f}$ de f à F est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme **induit** par f sur F.

B. Injectivité, surjectivité, bijectivité

B.1. Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives

Théorème 11.17

Soit f une application linéaire de E dans F.

i. f est injective sur E si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

ii. f est surjective de E dans F si et seulement si : $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 11.9 Démontrer la proposition 11.17.

Exercice 11.10 Soit E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et n un entier naturel non nul. On suppose que E est de dimension finie n et on considère une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E.

1. Montrer que f est injective sur E si et seulement si la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est libre dans F.
2. Montrer que f est surjective de E dans F si et seulement si la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est génératrice de F.
3. Montrer que f est bijective de E sur F si et seulement si la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est une base de F.

B.2. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$

Proposition 11.18

On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ a les propriétés suivantes :

i. $\mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E)$.

ii. $\forall f \in \mathrm{GL}(E),\ f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

iii. $\forall (f, g) \in (\mathrm{GL}(E))^2,\ f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$ et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Remarques

a. Attention, $\mathrm{GL}(E)$ n'est en général pas un espace vectoriel puisque la somme d'automorphismes de E n'est pas toujours un automorphisme de E.

b. Les propriétés énoncés ci-avant sont immédiates et la preuve en est laissée au soin du lecteur.

B.3. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Théorème 11.19

On suppose que E et F sont **de même dimension finie** et que f est une application linéaire de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective sur E,

ii. f est surjective de E sur F,

iii. f est bijective de E sur F.

Remarques

a. Ce théorème est très utile pour démontrer qu'une application linéaire f de E dans F est bijective. Si E et F sont de même dimension finie, on commence ainsi par étudier l'injectivité de f, car celle-ci est souvent plus simple à établir que la surjectivité.

b. Attention à la précision dans l'application de ce théorème. En particulier, on rappellera systématiquement que E et F sont de même dimension finie, et on évitera un vague « on est en dimension finie », qui ne veut pas dire grand chose

Preuve $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons que f soit injective. On a alors :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$$

De plus, comme E est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$$

donc, comme $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$:

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$$

et comme $\dim(E) = \dim(F)$:

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(F)$$

De plus, f est une application linéaire de E dans F, donc on a :

$$\operatorname{Im}(f) \subset F$$

et donc, avec l'égalité des dimensions :

$$\operatorname{Im}(f) = F$$

donc f est surjective.
$ii) \Longrightarrow iii)$ Supposons que f soit surjective de E sur F. On a donc :

$$\operatorname{Im}(f) = F$$

De plus, comme E est de dimension finie, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$$

donc, comme $\operatorname{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$:

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$$

d'où :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$$

donc f est injective. Étant injective et surjective de E sur F, f est donc bijective de E sur F.
$iii) \Longrightarrow i)$ Si f est bijective de E sur F, alors f est injective sur E, non ?

□

Proposition 11.20

On suppose que E est de **dimension finie** et que f est un endomorphisme de E. On a :

$$f \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{L}(E) \ / \ g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ ou } f \circ g = \mathrm{id}_E$$

De plus, si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$, alors f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Remarque Attention, cette proposition n'est valable que si E est de dimension finie.
Par exemple, si E est l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, si $\varphi : f \mapsto f'$ et si ψ est l'application qui à $f \in E$ associe sa primitive nulle en 0, alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ mais φ et ψ ne sont pas réciproques l'une de l'autre, ni même bijectives puisque $\psi \circ \varphi \neq \mathrm{id}_E$ (par exemple, si f est la fonction constante égale à 1, alors on a : $\psi \circ \varphi(f) = 0 \neq f$).

Preuve

- ◇ Supposons que f soit un automorphisme de E. Il existe alors un endomorphisme f de E tel que : $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_E$, donc tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$.
- ◇ Réciproquement, supposons qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

Les deux cas étant similaires (f et g jouant des rôles symétriques), on suppose pour simplifier que : $g \circ f = \mathrm{id}_E$. On a alors, pour tout $x \in E$ et comme g est linéaire :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Longrightarrow f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc, comme 0 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

f est donc injectif. Comme E est de dimension finie, il en découle que f est bijective d'après (11.19). Il en découle alors :

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1}$$

et donc :

$$g = f^{-1}$$

□

B.4. Espaces isomorphes

Définition 11.21

On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f de E sur F.

Proposition 11.22

Si E et F sont isomorphes alors E est de dimension finie si et seulement si F est de dimension finie et, dans ce cas :

$$\dim(E) = \dim(F).$$

En particulier, E est de dimension n non nulle si et seulement si E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.11 Démontrer la proposition 11.22. On pourra utiliser le théorème du rang.

C. Projecteurs et symétries

C.1. Projections, projecteurs

Définition 11.23

On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

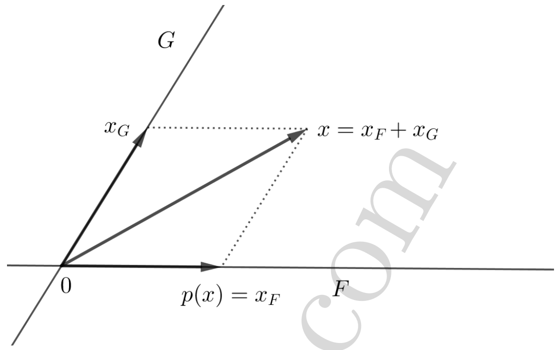
i. On appelle projection de E sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) l'application p vérifiant :

$$\forall x \in E \;/\; x = x_F + x_G \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G,\ p(x) = x_F$$

ii. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E vérifiant : $p \circ p = p$.

Remarque Géométriquement, on peut assez bien se représenter la projection d'un vecteur x, à l'aide de souvenirs de géométrie dans le plan ou dans l'espace.

Il peut être intéressant de noter que cette représentation graphique, même primaire, peut permettre de bien retenir la définition et de bien visualiser les résultats qui seront établis.



Proposition 11.24

Si p est un projecteur de E, alors :

i. $\text{Im}(p) = \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$

ii. $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

iii. p est la projection de E sur $F = \text{Im}(p)$ dans la direction $G = \text{Ker}(p)$.

Exercice 11.12 Démontrer la proposition 11.24.

Remarque Le programme officiel ne parle que de projecteur, et pas de projection.

Les deux notions pourront cependant être assimilées grâce à la proposition suivante (qui découle de manière immédiate de 11.24).

Théorème 11.25

p est un projecteur de E si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que p soit la projection de E sur F dans la direction G.

Proposition 11.26

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Si p est la projection sur F dans la direction G et si q est la projection sur G dans la direction F, alors :

$$p + q = \text{id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0$$

On dit que p et q sont les projecteurs associés aux sous-espaces vectoriels F et G.

C.2. Symétries

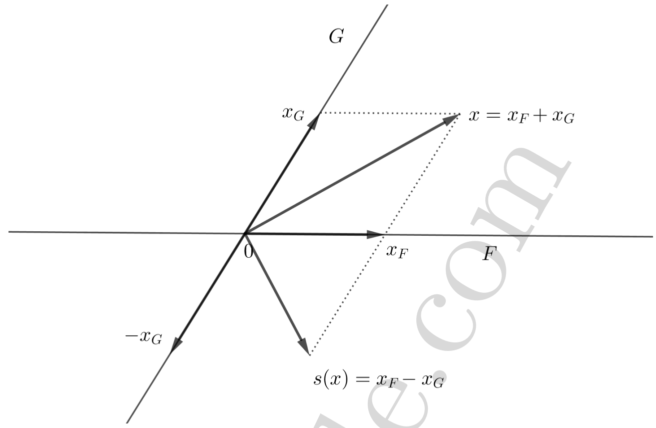
Définition 11.27

On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On appelle symétrie de E par rapport à F dans la direction G (ou parallèlement à G) l'application s vérifiant :

$$\forall x \in E \ / \ x = x_F + x_G \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G, \ s(x) = x_F - x_G$$

Remarque Comme pour les projections, il est encore possible de se représenter une symétrie vectorielle à l'aide de ses souvenirs de géométrie.

Encore une fois, cette représentation graphique basique pourra aider à mémoriser la définition.



Proposition 11.28

Si s est la symétrie de E par rapport à F dans la direction G, alors :

i. $F = \{x \in E \ / \ s(x) = x\} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$

ii. $G = \{x \in E \ / \ s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$

iii. $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

iv. $s = 2p - \mathrm{id}_E$, où p désigne la projection de E sur F de direction G.

Exercice 11.13 Démontrer la proposition 11.28.

Remarque Le programme officiel n'évoque les symétries que dans le cadre d'exemples d'utilisation des polynômes annulateurs. Pour cette raison, les connaissances théoriques évoquées dans ce paragraphe ne sont *a priori* pas exigibles des candidats. Il est donc préférable de bien savoir les démontrer.

Théorème 11.29

Soit s une application de E dans E. s est une symétrie de E si et seulement si s est un endomorphisme de E vérifiant : $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

D. Matrice d'une application linéaire

D.1. Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Dans ce paragraphe, on suppose que E et F sont de dimensions finies non nulles, respectivement égales à p et n. On considère également une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de E et une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de F.

Définition 11.30

Soit f une application linéaire de E dans F. On envisage les familles $(m_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}, \ldots, (m_{i,p})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de réels telles que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \varepsilon_i$$

Avec ces notations, la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée **matrice de f** relativement aux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (ou matrice représentative de f de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$) et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

Remarques

a. En pratique, pour obtenir la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on calcule $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ puis on écrit en colonne leurs coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

b. Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice M est plus simplement appelée matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

c. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ et où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de E et de F, on dit que M est la matrice canoniquement associée à f.

d. Quand on donne la matrice représentative d'une application linéaire, il est essentiel de préciser les bases considérées : si les bases changent, la matrice change !

Exemples 11.2

a. La matrice représentative de l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$ dans une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ est la matrice nulle.

b. La matrice représentative de l'endomorphisme identité de E dans une base quelconque de E est la matrice identité I_p. Attention, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases distinctes de E, la matrice représentative de l'endomorphisme identité de E n'est pas égale à la matrice I_p.

c. Si $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathbb{R}^2$ et si f est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x],\ f(P) = (P(1), P(1) + P(-2))$$

alors on a, en notant (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$f(e_0) = (1, 2), \quad f(e_1) = (1, -1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1, 5)$$

donc la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques respectives de E et F est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

d. Si E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle n et si f est une forme linéaire sur E, la matrice représentative de f dans une base de E est une matrice ligne.

Théorème 11.31

L'application φ de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui à une application f associe sa matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 11.14 Démontrer la proposition 11.31.

Remarques

a. En particulier, ce résultat prouve que, si E et F sont de dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance des images des vecteurs d'une base de E, que l'on peut déterminer à partir de sa matrice représentative.

b. Attention à la formulation : si l'on change de base, une matrice représentative représentera potentiellement plusieurs applications linéaires et une même application linéaire aura potentiellement plusieurs matrices représentatives différentes.

D.2. Liens entre opérations sur les applications linéaires et opérations matricielles

Théorème 11.32

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, respectivement égales à p et n.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
Soit f une application linéaire de E dans F et M sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ de E, en notant $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$; autrement dit :

$$\text{Si } MX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, \text{ alors : } f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \varepsilon_i$$

Preuve On note : $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. Par définition de M, on a donc :

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varepsilon_i$$

Soit alors x un vecteur de E, X la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On note :

$$X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \quad \text{et} \quad MX = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

On a donc :

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

et alors, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varepsilon_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j \right) \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que MX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

□

Remarques

a. Attention à la formulation du résultat. Ainsi, il faudra veiller à ne pas confondre MX et $f(x)$, sauf si l'énoncé l'autorise.

b. De même, il ne faut pas dire que MX « représente » $f(x)$ sans mentionner de base.

c. L'intérêt principal de cette proposition apparaît dans la proposition suivante.

Proposition 11.33

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives p, n et r non nulles. Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F et G. On a :

i. $\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2\,,\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f+g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$

ii. $\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$

iii. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G),\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g\circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$

Preuve Les points *i* et *ii* ont déjà été établis dans la preuve de 11.31.
Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Pour simplifier, on note :

$$M_f = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f), \quad M_g = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g), \quad M_{g\circ f} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g\circ f) \quad \text{et} \quad N = M_g M_f$$

Soit x un vecteur de E. On note :

$$y = f(x), \quad z = g(y)$$

et on note alors X, Y et Z les colonnes des coordonnées respectives de x, y et z dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.
D'après 11.33, on a d'une part, comme $y = f(x)$ et $z = g(y)$:

$$Y = M_f X, \quad Z = M_g Y$$

et d'autre part, comme $z = (g\circ f)(x)$:

$$Z = M_{g\circ f} X$$

donc :

$$\begin{aligned} M_{g\circ f}X &= M_g M_f X \\ &= NX \end{aligned}$$

Notons alors $\mathcal{B}_E = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. La dernière égalité étant valable pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, elle l'est en particulier pour les colonnes $X_1, \ldots, X_p$ représentatives de $e_1, \ldots, e_p$ dans la base $\mathcal{B}_E$, c'est-à-dire pour les vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ formant la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ M_{g\circ f}X_i = NX_i$$

ce qui signifie que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la $i^{ème}$ colonne de $M_{g\circ f}$ est égale à la $i^{ème}$ colonne de N, et prouve donc que :

$$M_{g\circ f} = N$$

□

Remarques

a. Le plus souvent dans les sujets de concours, on se situe dans le cas où $E = F = G$ (et f et g sont donc des endomorphismes de E), ce qui simplifie beaucoup les notations.

b. En particulier, on en déduit de manière immédiate le résultat suivant :

Proposition 11.34

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ une base de E, f et g deux endomorphismes de E, de matrices représentatives respectives M_f et M_g dans la même base $\mathcal{B}$.
f et g commutent si et seulement si M_f et M_g commutent ; autrement dit :

$$f\circ g = g\circ f \iff M_f M_g = M_g M_f$$

Théorème 11.35

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, f une application linéaire de E dans F et M la matrice représentative de f relativement à deux bases quelconques de E et F. On a :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$$

Preuve Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Comme f est une application linéaire de E dans F, la famille $(f(e_j))_{1\leqslant j\leqslant p}$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \\ &= \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \end{aligned}$$

De plus, par définition de la matrice M associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, les colonnes respectives de M sont les colonnes des coordonnées des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ dans la base $\mathcal{C}$, donc M est la matrice de la famille de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$ et donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$$

□

Proposition 11.36

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, f une application linéaire de E dans F.
f est bijective si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et, dans ce cas :

$$[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$$

Exercice 11.15 Démontrer la proposition 11.36.

Remarques

a. Si E et F sont des espaces vectoriels de même dimension finie non nulle et si f est une application linéaire de E dans F, on peut donc prouver que f est un isomorphisme en prouvant l'inversibilité de l'une de ses matrices représentatives.

b. Réciproquement, si M est une matrice carrée et si f est une application linéaire de E dans F dont la matrice associée dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est M, on peut montrer que M est inversible et déterminer son inverse M^{-1} en montrant que f est bijective et en déterminant sa réciproque f^{-1} puis en écrivant sa matrice relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

D.3. Matrices de passage

Définition 11.37

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
La matrice de l'application identité Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Remarques

a. Attention à l'ordre des bases, probablement contre-intuitif pour beaucoup.

b. En pratique, pour obtenir la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, il suffit de chercher les coordonnées des vecteurs $e'_1, \dots, e'_n$ dans la base $\mathcal{B}$ puis d'écrire, en colonne et dans cet ordre, les coefficients de $e'_1, \dots, e'_n$ dans $\mathcal{B}$.

Exemples 11.3

a. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice identité.

b. Si $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ ($\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et si $\mathcal{B}' = ((1,2,0),(2,1,0),(-1,1,-1))$ (on laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$), alors :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Avec les notations précédentes, pour trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, on peut noter $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ puis exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3. Pour cela on remarque que :

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = e'_1 \\ 2e_1 + e_2 = e'_2 \\ -e_1 + e_2 - e_3 = e'_3 \end{cases}$$

donc, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = e'_1 \\ -3e_2 = -2e'_1 + e'_2 \\ -e_1 + e_2 - e_3 = e'_3 \end{cases}$$

et alors, par substitution (dans la première puis la dernière ligne) :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{3}\, e'_1 + \frac{2}{3}\, e'_2 \\ e_2 = \frac{2}{3}\, e'_1 - \frac{1}{3}\, e'_2 \\ e_3 = e'_1 - e'_2 - e'_3 \end{cases}$$

On en déduit la matrice $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en écrivant en colonne et dans cet ordre les coefficients dans $\mathcal{B}'$ de e_1, e_2, e_3 :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

D.4. Dimensions de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Proposition 11.38

Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors on a :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

En particulier, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors :

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = [\dim(E)]^2$$

Preuve On suppose que E et F sont de dimensions finies, respectivement p et n.
Si $p = 0$ ou $n = 0$, $\mathcal{L}(E,F)$ ne contient que l'application nulle, et est donc de dimension $0 = np$.
Supposons maintenant que p et n soient tous deux non nuls. D'après 11.31, $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont isomorphes, donc :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$$

d'où :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$$

□

E. Polynômes d'endomorphismes

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel et f désigne un **endomorphisme** de E.

E.1. Polynômes et polynômes annulateurs d'un endomorphisme

Définition 11.39

On définit la suite d'endomorphisme $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par :

$$f^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n$$

Étant donné un polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on définit plus généralement l'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

Remarque Attention au coefficient constant du polynôme. Par exemple, si f est un endomorphisme de E et si $P(X) = X^2 + 2X + \boxed{3}$, alors on a :

$$P(f) = f^2 + 2f + \boxed{3\,\mathrm{id}_E}$$

Définition 11.40

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si P est un polynôme non nul et : $P(f) = 0$.

Théorème 11.41

On suppose que E est de dimension finie non nulle et que $\mathcal{B}$ est une base de E. On note A la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est la matrice représentative de f^n dans la base $\mathcal{B}$.

ii. Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(A)$ est la matrice représentative de $P(f)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque Ces résultats sont des conséquences immédiates de 11.33.

E.2. Opérations sur les polynômes d'endomorphismes

Proposition 11.42

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et λ un élément de $\mathbb{R}$. On a :

i. $(\lambda P)(f) = \lambda P(f)$

ii. $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$

iii. $(PQ)(f) = P(f) \circ (f) = Q(f) \circ P(f)$.

Remarque Ces propriétés ne sont pas clairement au programme, donc il est préférable de bien savoir les justifier.

Preuve On considère un réel λ et deux polynômes P et Q, écrits sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

i. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

donc, par définition de $(\lambda P)(f)$:

$$\begin{aligned}(\lambda P)(f) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k f^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \\ &= \lambda P(f)\end{aligned}$$

ii. De même on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k$$

donc, par définition de $(P+Q)(f)$:

$$\begin{aligned}(P+Q)(f) &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, f^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^k + \sum_{k=0}^{n} b_k f^k \\ &= P(f) + Q(f)\end{aligned}$$

iii. Enfin on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_k b_i x^{k+i}$$

donc, d'après le point précédent :

$$\begin{aligned}(PQ)(f) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_k b_i f^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_k b_i f^k \circ f^i\end{aligned}$$

soit encore, comme f^k est linéaire :

$$\begin{aligned}(PQ)(f) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \circ \left(\sum_{i=0}^{n} b_i f^i \right) \\ &= P(f) \circ Q(f)\end{aligned}$$

La dernière égalité s'en déduit immédiatement puisque $PQ = QP$.

□

E.3. Existence d'un polynôme annulateur

Théorème 11.43

Si E est de dimension finie, tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur.

Preuve On note n la dimension de E et f un endomorphisme de f. Rappelons que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 et que, par conséquent, toute famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{L}(E)$ est liée. En particulier, la famille $(f^k)_{0\leqslant k\leqslant n^2}$ est donc une famille liée, ce quii signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$$

donc que le polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n^2} a_k x^k$ (non nul car au moins l'un de ses coefficients n'est pas nul) est un polynôme annulateur de f.

□

Remarque Si f est un endomorphisme de E, un polynôme annulateur de f ne peut être constant. En effet, si $P(x) = c$ (où c est une constante réelle), alors $P(f) = c\,\mathrm{Id}$ donc $P(f) = 0$ si et seulement si $c = 0$; or un polynôme annulateur n'est pas nul.

Exercice 11.16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphismee de E. Montrer que f admet une infinité de polynômes annulateurs.

E.4. Formule du binôme de Newton

Proposition 11.44 ► Formule du binôme de Newton

Soit f et g deux endomorphismes de E. Si f et g commutent, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} g^k \circ f^{p-k}$$

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de 11.41 et de la formule du binôme de Newton pour les matrices.

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 11-1

Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Soit λ un réel. On a :

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$$

donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), 0, 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x + 2y) + (x' + 2y'), 0, \lambda(2x + 4y) + (2x' + 4y')) \\ &= \lambda(x + 2y, 0, 2x + 4y) + (x' + 2y', 0, 2x' + 4y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

Correction de l'exercice 11-2

i. $\mathcal{L}(E, F)$ est inclus dans l'espace vectoriel des applications de E dans F. De plus il n'est pas vide car il contient l'application nulle θ de E dans F définie par :

$$\forall x \in E,\ \theta(x) = 0_F$$

En effet, on a bien :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \theta(\lambda x + y) = 0_F = \lambda \cdot 0_F + 0_F = \lambda\theta(x) + \theta(y)$$

Enfin, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et si μ est un réel, $\mu f + g$ est est une application de E dans F et on a, par définition de la somme d'applications et de la multiplication d'une application par un réel :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\mu f + g)(\lambda x + y) = \mu f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y)$$

donc, comme f et g sont linéaires :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\mu f + g)(\lambda x + y) &= \mu[\lambda f(x) + f(y)] + \lambda g(x) + g(y) \\ &= \lambda[\mu f(x) + g(x)] + [\mu f(y) + g(y)] \\ &= \lambda(\mu f + g)(x) + (\mu f + g)(y) \end{aligned}$$

donc $\mu f + g$ est linéaire. Ainsi $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$, donc c'est un espace vectoriel.

ii. C'est le résultat précédent avec $F = E$.

iii. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. $g \circ f$ est une application de E dans G et on a :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y))$$

donc, successivement par linéarité de f puis de g :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(\lambda x + y) &= g(\lambda f(x) + f(y)) \\ &= \lambda g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= \lambda(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Correction de l'exercice 11-3

Supposons que f soit un isomorphisme de E sur F. Alors f^{-1} est une application de F dans E.
Soit alors $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f est bijective de E sur F, il existe $(u, v) \in E^2$ tel que :

$$x = f(u) \quad \text{et} \quad y = f(v)$$

et on a alors, par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x+y) &= f^{-1}(\lambda f(u)+f(v)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda u+v)) \\ &= \lambda u+v \\ &= \lambda f^{-1}(x)+f^{-1}(y) \end{aligned}$$

donc f^{-1} est linéaire de F dans E : c'est un isomorphisme de F dans E.

Correction de l'exercice 11-4

- Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Par définition :

$$\begin{aligned} u\in\operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y)=(0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \\ &\iff x=-2y \\ &\iff u=(-2y,y) \\ &\iff u=y\,(-2,1) \end{aligned}$$

  donc :

$$\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}((-2,1))$$

- On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{f(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x+2y,0,2x+4y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x\,(1,0,2)+y\,(2,0,4)\,,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,2),(2,0,4)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,2)) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11-5

1. $\operatorname{Ker}(f)$ est inclus dans E par définition et n'est pas vide car il contient 0_E d'après 11.2. Par ailleurs, comme f est linéaire, on a :

$$\forall (x,y)\in(\operatorname{Ker}(f))^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{aligned} f(\lambda x+y) &= \lambda f(x)+f(y) \\ &= \lambda 0_F+0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

   d'où :

$$\forall (x,y)\in(\operatorname{Ker}(f))^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda x+y\in\operatorname{Ker}(f)$$

   ce qui permet de conclure que $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Par définition $\operatorname{Im}(f)$ est inclus dans F et n'est pas vide car 0_F appartient à $\operatorname{Im}(f)$ d'après 11.2. Soit alors $(x,y)\in(\operatorname{Im}(f))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Par définition, il existe donc $(u,v)\in E^2$ tel que :

$$x=f(u)\quad\text{et}\quad y=f(v)$$

   et on a alors, comme f est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \lambda x+y &= \lambda f(u)+f(v) \\ &= f(\lambda u+v) \end{aligned}$$

   donc $\lambda x+y$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Correction de l'exercice 11-6

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de E. Notons déjà que $f(x_1),\dots,f(x_n)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$ par définition donc, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F :

$$\mathrm{Vect}((f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, comme $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

et alors, par linéarité de f :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

donc y appartient à $\mathrm{Vect}(f(x_1),\dots,f(x_n))$ et :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}((f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n})$$

ce qui prouve l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

Correction de l'exercice 11-7

1. Si $\dim(E) = 0$, alors $E = \{0_E\}$ et on a :

$$\forall x \in E,\ f(x) = 0_F$$

   Il en découle que :

$$\mathrm{Ker}(f) = E = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$$

   $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont donc tous deux de dimension 0, ce qui prouve le théorème dans ce cas.

2. (a) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie, donc $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension finie. De plus E est de dimension finie, donc il admet une base $(x_1,\dots,x_n)$. D'après la proprosition 11.11, $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, qui est donc de dimension finie.

   (b) Si $p = n$, alors on a :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset E \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$$

   donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = E$$

   Il en découle :

$$\forall x \in E,\ f(x) = 0_F$$

   donc que :

$$\mathrm{Ker}(f) = E \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$$

   $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension 0, ce qui prouve le théorème dans ce cas.

   (c) $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $p \geq 1$ donc il existe des vecteurs $e_1,\dots,e_p$ de E tels que $(e_1,\dots,e_p)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe alors des vecteurs $e_{p+1},\dots,e_n$ de E tels que $(e_1,\dots,e_n)$ soit une base de E.

   (d) Soit $(\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n)$ une famille de réels telle que :

$$\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0$$

   Comme f est linéaire, on a alors :

$$f\left(\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0$$

donc :

$$\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k \in \mathrm{Ker}(f)$$

Or $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, donc il existe des réels $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que :

$$\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k e_k$$

soit encore, en notant $\lambda_k = -\mu_k$ si $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$$

et finalement, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_k = 0$$

donc en particulier :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ \lambda_k = 0$$

ce qui prouve que la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.

(e) Comme $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E et comme f est linéaire sur E, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$$

Ainsi la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or elle est également libre, donc c'en est une base et on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - p = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

(f) Si $p = 0$, on raisonne comme précédemment avec une base $(e_1, \ldots, e_n)$ quelconque de E et on montre que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 11-8

- On a :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(f),\ f(f(x)) = f(0)$$

donc, comme f est linéaire :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(f),\ f(f(x)) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(f),\ f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par f.

- Par définition :

$$\forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Im}(f)$$

donc en particulier, comme $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans E (f est un endomorphisme de E) :

$$\forall x \in \mathrm{Im}(f),\ f(x) \in \mathrm{Im}(f)$$

ce qui signifie que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.

Correction de l'exercice 11-9

1. ◇ Supposons que f soit injective. On a alors, comme f est linéaire :

$$f(x) = 0_F \Longleftrightarrow f(x) = f(0_E)$$

donc, comme f est injective :

$$f(x) = 0_F \Longleftrightarrow x = 0_E$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

◇ Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x) - f(y) = 0_F$$

donc, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow f(x-y) = 0_F \\ &\Longrightarrow x - y \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\Longrightarrow x - y = 0_E \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est injective.

2. f est une application de E dans F donc elle est surjective si et seulement si $f(E) = F$, donc si et seulement si : $\mathrm{Im}(f) = F$.

Correction de l'exercice 11-10

1. ◇ Supposons que f soit injective et considérons des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Par linéarité de f, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 &\Longleftrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

donc, d'après 11.17 :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$$

donc, comme la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre (c'est une base de E) :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

ce qui prouve que la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre dans F.

◇ Réciproquement, supposons que la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ soit libre dans F et considérons un élément x de E. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

et alors, comme f est linéaire :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Longleftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0 \end{aligned}$$

d'où, comme la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\Longleftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et donc que f est injective.

2. Comme $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E, on sait que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

donc :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F &\iff \mathrm{Im}(f) = F \\ &\iff F = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \\ &\iff (f(x_1), \ldots, f(x_n) \text{ est génératrice de } F \end{aligned}$$

3. Il suffit de combiner les résultats des deux questions précédentes, f étant bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Correction de l'exercice 11-11

- Supposons que E soit de dimension finie. Alors, comme f est linéaire su E et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Or $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ (car f est injective) et $\mathrm{Im}(f) = F$ (car f est surjective), donc F est de dimension finie et :

$$\dim(F) = \dim(E)$$

- Réciproquement, supposons que F soit de dimension finie. Alors, comme f est un isomorphisme de E sur F, f^{-1} est un isomorphisme de F sur E et, en raisonnant comme dans me premier point avec f^{-1}, E est de dimension finie égale à celle de F.

Correction de l'exercice 11-12

i. On raisonne par double inclusion. Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et alors, comme $p \circ p = p$:

$$\begin{aligned} y &= (p \circ p)(x) \\ &= p(p(x)) \\ &= p(y) \end{aligned}$$

donc : $\mathrm{Im}(p) \subset \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$.
Réciproquement, soit $y \in \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$. On a donc $y = p(y)$ donc y appartient à $\mathrm{Im}(p)$ et :

$$\{x \in E \ / \ p(x) = x\} \subset \mathrm{Im}(p)$$

On conclut par doublie inclusion.

ii. Notons tout d'abord que, comme E est de dimension finie, le théorème du rang assure que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E)$$

Il suffit alors de prouver que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. x appartient à $\mathrm{Ker}(p)$ donc $p(x) = 0$. De plus x appartient à $\mathrm{Im}(p)$ donc, d'après le résultat précédent, $x = p(x)$. Il en découle que $x = 0$ et donc que :

$$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \{0\}$$

L'inclusion réciproque étant vraie car $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E), on en déduit que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe., ce qui permet de conclure.

iii. On peut remarquer que :

$$\forall x \in E, \ x = p(x) + [x - p(x)]$$

où $p(x)$ appartient à $F = \mathrm{Im}(p)$ (par définition de $\mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x)$ appartient à $G = \mathrm{Ker}(p)$ (car p est linéaire donc $p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x) = 0$).
Comme F et G sont supplémentaires dans E d'après le précédent, p est donc la projection de E sur $F = \mathrm{Im}(p)$ dans la direction $G = \mathrm{Ker}(p)$.

Correction de l'exercice 11-13

Soit $x \in E$. Rappelons que F et G étant supplémentaires dans E, il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que :

$$x = x_F + x_G$$

et que l'on a alors :

$$s(x) = x_F - x_G$$

On adopte ces notations dans la suite pour un vecteur x de E fixé.

i. Soit $x \in F$. Par définition, on a alors $x_F = x$ et $x_G = 0$ (d'après l'unicité de x_F et x_G) et donc :

$$s(x) = x - 0 = x$$

Ainsi $s(x) - x = 0$ et x appartient à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ donc :

$$F \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$$

Réciproquement. Soit $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$. On a donc :

$$x_F - x_G = s(x) = x = x_F + x_G$$

donc, par unicité du couple (x_F, x_G) :

$$x_G = 0$$

Ainsi $x = x_F$ appartient à F et :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \subset F$$

On a donc l'égalité par double inclusion.

ii. Se démontre exactement comme le point précédent.

iii. C'est une conséquencde immédiate des points précédents et du fit que $F \oplus G = E$.

iv. Avec les notations préliminaires, on a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} s(x) &= x_F - x_G \\ &= x_F - (x - x_F) \\ &= 2x_F - x \\ &= 2p(x) - x \end{aligned}$$

d'où : $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Correction de l'exercice 11-14

- Par définition, φ est une application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit alors (f, g) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On note :

$$\varphi(f) = M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{et} \quad \varphi(g) = N = (n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

On a donc :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varepsilon_i \quad \text{et} \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} n_{i,j}\varepsilon_i$$

d'où :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ (\lambda f + g)(e_j) = \lambda f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda m_{i,j} + n_{i,j})\,\varepsilon_i$$

On en déduit :

$$\varphi(\lambda f + g) = (\lambda m_{i,j} + n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \lambda M + N$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$$

ce qui prouve que φ est linéaire.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. Comme $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que :
$$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$$
et alors, comme f est linéaire :
$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j)$$
De plus on a :
$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\Longleftrightarrow \varphi(f) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \end{aligned}$$
et comme $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ appartient à $\operatorname{Ker}(\varphi)$:
$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathcal{L}(E,F)}\}$$
ce qui prouve que φ est injective.
- Enfin, pour tout $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, si on considère l'application linéaire f de E dans F définie par :
$$\forall x \in E \ / \ x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_j m_{i,j} \varepsilon_j$$
alors on a en particulier :
$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\varepsilon_j$$
donc $\varphi(f) = M$, ce qui prouve que φ est surjective.
- Finalement φ est linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, injective et surjective, donc bijective et c'est ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Correction de l'exercice 11-15

On note n la dimension commune de E et F.

- Supposons que f soit bijective de E sur F. On a alors :
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$
donc :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = I_n$$
donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et :
$$[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$$
- Réciproquement, supposons que $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et notons g l'application linéaire de F dans E dont la matrice relative aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est $[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1}$. On a alors :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,[\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1} = [\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]^{-1}\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = I_n$$
donc :
$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
ce qui prouve que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

Correction de l'exercice 11-16

D'après 11.43, f admet un polynôme annulateur P. P est donc un polynôme non nul tel que : $P(f) = 0$.
On a alors :
$$\forall Q \in \mathbb{R}[x],\ (QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = 0$$
donc QP est un polynôme annulateur de f pour tout polynôme non nul Q, ce qui prouve l'existence d'une infinité de polynômes annulateurs de f.

Sommaire