10 Sommes de sous-espaces vectoriels

ECG Maths Approfondies
Semestre 2

De même que nous avons vu précédemment que l'on peut, quand E est un espace vectoriel de dimension finie, caractériser les éléments de E à partir d'une famille d'éléments de E choisis convenablement (famille génératrice), il est légitime de se demander si l'ensemble E peut être caractérisé par un choix adéquat de certains de ses sous-espaces vectoriels.
On verra qu'en général la réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.
Pour pallier cette lacune et comme on peut sommer les éléments d'un espace vectoriel, on définit la somme de sous-espaces vectoriels de E, qui se substituera dans les raisonnements à la notion de réunion d'ensembles.

A. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 10.1

[breakable] Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme des sous-espaces vectoriels** F et G de E et on note $F+G$ l'ensemble défini par :

$$F+G=\{x+y,\ (x,y)\in F\times G\}$$

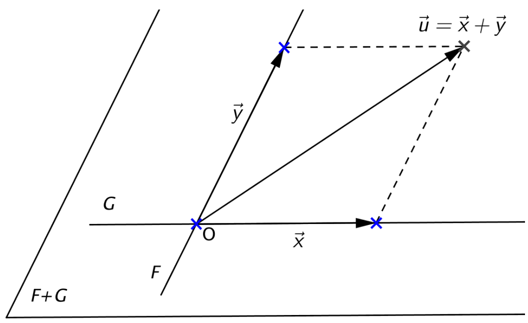
Plus généralement, si $F_1,\dots,F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E, on définit la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ par :

$$\sum_{k=1}^{p} F_k=\left\{\sum_{k=1}^{p} x_k,\ (x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}\in F_1\times F_2\times\cdots\times F_p\right\}$$

Remarque Cette notion n'est pas entièrement nouvelle ; en effet, on peut se souvenir q'un vecteur $\vec{u}$ du plan repéré $\mathbb{R}^2$ peut toujours s'écrire comme somme d'un vecteur $\vec{x}$ de l'axe des abscisses F et d'un vecteur $\vec{y}$ de l'axe des ordonnées G, ce qui permet d'écrire que l'on a l'égalité :

$$\mathbb{R}^2=F+G$$

Dans cet exemple, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il y a même unicité du couple $(\vec{x},\vec{y})$ tel que : $\vec{u}=\vec{x}+\vec{y}$.



Exemples 10.1 **a.** Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$. Soit P_1 et P_2 les polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = x+1 \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2-1$$

Si $F = \mathrm{Vect}(P_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(P_2)$, alors :

$$\begin{aligned} F+G &= \left\{P : x \mapsto a\,(x+1) + b\left(x^2-1\right),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(P_1, P_2) \\ &= \left\{P : x \mapsto ax^2 + bx + b - a,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

b. Si $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$, alors :

$$\begin{aligned} F+G &= \left\{a\,(1,0,0) + b\,(1,1,1) + c\,(0,1,1),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(a+b, b+c, b+c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,1,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1)) \end{aligned}$$

On constate que $F+G = G$, ce qui est naturel puisque $F \subset G$.

Exercice 10.1 On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que : $F+G = E$.

Proposition 10.2

Si E est un espace vectoriel et si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E, alors $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant $F_1, \dots, F_p$.

Exercice 10.2 Démontrer la proposition 10.2.

Remarque Si E est un espace vectoriel et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F+G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$. Cette propriété ne fait pas partie du cours mais sera vue en exercice.

B. Somme directe

Définition 10.3

Soient E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe ou que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe, et on note alors $F \oplus \cdots \oplus F_p$ si :

$$\forall x \in \sum_{k=1}^{p} F_k,\ \exists!\,(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in F_1 \times \cdots \times F_p \ /\ x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Exemple 10.2 Si $E = \mathbb{R}_2[x]$, $P_1(x) = x+1$, $P_2(x) = x^2-1$, $F = \mathrm{Vect}(X+1)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2-1)$, alors F et G sont en somme directe. En effet, pour tout $P \in F+G$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aP_1 + bP_2$ et, s'il existe $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = a'P_1 + b'P_2$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + b - a = a'x^2 + b'x + b' - a'$$

et alors, par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b'$$

ce qui prouve que :

$$\forall P \in F+G,\ \exists!\,(A,B) \in F \times G \ /\ P = A + B$$

Exercice 10.3 On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a déjà vu dans l'exercice 9.1 que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que : $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

Proposition 10.4

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$F + G = F \oplus G \Longleftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

De plus, si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E, alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe si et seulement si :

$$\forall (x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \ x_k = 0 \right)$$

Preuve

- Supposons que F et G soient en somme directe et considérons un élément de $F \cap G$. En remarquant que $x = x + 0_E$ et $x = 0_E + x$ où $(x, 0_E)$ et $(0_E, x)$ appartiennent à $F \times G$ et comme F et G sont en somme directe, il en découle que : $(x, 0_E) = (0_E, x)$, et donc que : $x = 0_E$.
  De plus, comme F et G contiennent tous les deux le vecteur nul de E, 0_E appartient aussi à $F \cap G$, donc :
  $$F \cap G = \{0_E\}$$
- Réciproquement, supposons que : $F \cap G = \{0_E\}$ et considérons un élément x de $F + G$. Supposons qu'il existe deux couples (x_F, x_G) et (x'_F, x'_G) de $F \times G$ tels que :
  $$x = x_F + x_G = x'_F + x'_G$$
  On a alors :
  $$x_F - x'_F = x_G - x'_G$$
  Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, il en découle que $x_F - x'_F$ et $x_G - x'_G$ appartiennent tous deux à $F \cap G$ et donc, par hypothèse :
  $$x_F - x'_F = 0_E \quad \text{et} \quad x_G - x'_G = 0_E$$
  et donc :
  $$x_F = x'_F \quad \text{et} \quad x_G = x'_G$$
  ce qui prouve que F et G sont en somme directe.
- Supposons que $F_1, \ldots, F_p$ soient en somme directe. Comme le vecteur 0_E appartient à chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ et $\sum_{k=1}^{p} F_k$ et comme $0_E = \sum_{k=1}^{p} 0_E$, on déduit de la définition d'une somme directe que :
  $$\forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in F_1 \times \cdots \times F_p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \ x_k = 0_E \right)$$
- Supposons que :
  $$\forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in F_1 \times \cdots \times F_p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \ x_k = 0_E \right)$$
  Considérons alors un élément x de $\sum_{k=1}^{p} F_k$, écrit sous la forme
  $$x = \sum_{k=1}^{p} x_k \quad \text{et} \quad x = \sum_{k=1}^{p} x'_k$$

où $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ et $(x'_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont deux familles appartenant à $F_1\times\cdots\times F_p$. Comme $x-x=0_E$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{p}(x_k-x'_k)=0_E$$

et par hypothèse :

$$\forall k\in[\![1,p]\!]\,,\ x_k-x'_k=0_E$$

d'où :

$$\forall k\in[\![1,p]\!]\,,\ x_k=x'_k$$

ce qui prouve que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}F_k$ est directe.

□

Remarque Le lecteur fera attention à la distinction dans cette proposition de la somme de deux sous-espaces vectoriels et de la somme d'au moins trois sous-espaces vectoriels de E. Ainsi, trois sous-espaces vectoriels de E F,G et H peuvent vérifier $F\cap G\cap H=\{0_E\}$ sans pour autant que la somme soit directe.
Par exemple, si $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathrm{Vect}((0,0))$, $G=\mathrm{Vect}((0,1))$ et $H=\mathrm{Vect}((1,1))$, on vérifie aisément que :

$$F\cap G\cap H=\{0_E\}$$

Pourtant la somme $F+G+H$ n'est pas directe puisque, par exemple :

$$(2,1)=1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)+1\cdot(1,1)=2\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)+0\cdot(1,1)$$

Proposition 10.5

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe et (p,q) un couple d'entiers naturels non nuls tel que : $q\geqslant p+1$.
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille libre d'éléments de F et si $(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant q}$ est une famille libre d'éléments de G, alors la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ est libre dans $F\oplus G$.

Preuve Supposons que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit une famille libre d'éléments de F et si $(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant q}$ soit une famille libre d'éléments de G et considérons une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{q}\lambda_i x_i=0_E$$

En notant $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ et $y=\displaystyle\sum_{i=p+1}^{q}\lambda_i x_i$, on a alors :

$$x+y=0_E\quad\text{et}\quad(x,y)\in F\times G$$

donc, comme F et G sont en somme directe :

$$x=y=0$$

et alors, comme les familles $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant q}$ sont libres :

$$\forall i\in[\![1,p]\!]\,,\ \lambda_i=0\quad\text{et}\quad\forall i\in[\![p+1,q]\!]\,,\ \lambda_i=0$$

ce qui prouve finalement que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ est libre dans $F\oplus G$.

□

Théorème 10.6

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimensions finies et en somme directe, alors :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Plus généralement, si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe, tous de dimension finie, alors :

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)$$

Preuve On démontre le résultat pour une somme de deux sous-espaces vectoriels. Le cas général s'en déduit de manière immédiate par récurrence. On suppose donc que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, en somme directe et de dimensions finies. Le cas où $F = \{0_E\}$ ou $G = \{0_E\}$ étant immédiat, on suppose que F et G sont de dimensions supérieures ou égales à 1 et on considère alors une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de F et une base $(x_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q}$ de G.
D'après la proposition 10.5, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ est alors une famille libre d'éléments de $F \oplus G$. Montrons alors que cette famille est également génératrice de $F \oplus G$.
Soit $x \in F \oplus G$. Par définition, il existe un couple $(y, z) \in F \times G$ tel que : $x = y + z$. De plus, il existe deux familles $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\lambda_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q}$ de scalaires telles que :

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad z = \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i x_i$$

et alors :

$$x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$$

ce qui prouve que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ est génératrice de $F \oplus G$, donc, comme elle est libre, que c'est une base de $F \oplus G$, ce qui prouve que :

$$\dim(F \oplus G) = q = \dim(F) + \dim(G)$$

□

C. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 10.7

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si :

$$E = F + G = F \oplus G$$

autrement dit si :

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(y, z) \in F \times G \ /\ x = y + z$$

Remarques

a. Il n'y a en général pas unicité d'un supplémentaire et donc, si l'on a $E = F \oplus G = F \oplus H$, on ne pourra en général pas identifier et affirmer que $G = H$. Par exemple, si l'on a :

$$E = \mathbb{R}^2, \quad F = \text{Vect}((1,0)), \quad G = \text{Vect}((0,1)) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}((1,1))$$

on montre aisément que $F = F \oplus G = F \oplus H$ et pourtant G et H sont distincts.

b. Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire, qui n'ont pas du tout la même signification. Le lecteur retiendra que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel F de E, ne contenant pas le vecteur nul (puisqu'il appartient à F), n'est jamais un sous-espace vectoriel de E, ce qui rend donc cette notion inutile en algèbre linéaire.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E ne signifie pas qu'un vecteur de E n'appartenant pas à F appartient toujours à G. Ainsi, dans l'exemple précédent, le vecteur $(1,1)$ n'appartient ni à F, ni à G, bien que F et G soient supplémentaires dans E.

c. Cette notion sera particulièrement utile dans le chapitre 11. Diagonalisation.

Exercice 10.4 On note $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel de E formé des applications paires et G le sous-espace vectoriel de E formé des applications impaires. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Définition 10.8

Soient E un espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est somme directe de $F_1, \ldots, F_p$ si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \exists!\, (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in F_1 \times \cdots \times F_p \ /\ x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Remarque Si $p = 2$, on retrouve la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Proposition 10.9

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire dans E.

Preuve Comme $E = E \oplus \{0_E\}$, le résultat est immédiat si $F = \{0_E\}$ et si $F = E$. On suppose désormais que F est distinct de $\{0_E\}$ et de E.
Comme E est de dimension finie, F est de dimension finie (non nulle puisque $F \neq \{0\}$) donc il existe une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de F (où p est la dimension de F). La famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est alors une famille libre dans E donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille $(x_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q}$ de vecteurs de E (q désignant la dimension de E) telle que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ soit une base de E.
On note alors :

$$G = \operatorname{Vect}((x_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q})$$

Montrons alors que F et G sont supplémentaires dans E.

◇ Soit $x \in E$. Comme $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ est une base de E, il existe une famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de scalaires telle que :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i}_{=y} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i x_i}_{=z} \end{aligned}$$

Comme y et z appartiennent respectivement à F et G, on a donc prouvé que :

$$E = F + G$$

Montrons finalement que la somme $F + G$ est directe. Soit $x \in F \cap G$. Comme x appartient à F et à G, il existe deux familles de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q}$ telles que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=p+1}^{q} \mu_i x_i$$

et alors, en notant $\lambda_i = -\mu_i$ pour $i \in [\![p+1, q]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i = 0$$

et comme la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ est libre :

$$\forall i \in [\![1, q]\!],\ \lambda_i = 0$$

d'où :

$$x = 0$$

Comme 0 appartient à $F \cap G$, on a donc : $F \cap G = \{0\}$, ce qui prouve que F et G sont en somme directe, donc finalement que F et G sont supplémentaires dans E.

□

Théorème 10.10 ▶ Formule de Grassmann

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimensions finies, alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Preuve Comme F et G sont de dimension finie, $F \cap G$ est de dimension finie et admet donc un supplémentaire G' dans G. On a alors :

$$G = G' \oplus (F \cap G)$$

Montrons alors que $F + G = F \oplus G'$. Comme G' est inclus dans G, on a :

$$F \cap G' = (F \cap G) \cap G'$$

et donc, comme $F \cap G$ et G' sont en somme directe :

$$F \cap G' = \{0\}$$

Ainsi, F et G' sont en somme directe. Soit alors $x \in (F+G)$. Il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que : $x = y + z$. De plus, z appartient à G donc il existe $(z', z'') \in (F \cap G) \times G'$ tel que : $z = z' + z''$ et alors :

$$x = (y + z') + z''$$

et donc, comme $y + z'$ et z'' appartiennent respectivement à F et à G' : $x \in F \oplus G'$. Comme F et G' sont deux sous-espaces vectoriels de $F + G$, on en déduit finalement que :

$$F + G = F \oplus G'$$

et donc, d'après 10.6 :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G')$$

Par ailleurs, encore d'après 10.6, on a :

$$\dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(G')$$

donc :

$$\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

ce qui prouve finalement le résultat annoncé. □

Proposition 10.11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

Plus généralement, si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \iff \begin{cases} F_1 + \cdots + F_p = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(F_k) = \dim(E) \end{cases}$$

Preuve $(i \Rightarrow ii)$ Supposons que F et G soient supplémentaires dans E. Alors la somme $F+G$ est directe donc, d'après 10.4 :

$$F \cap G = \{0\}$$

et :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

donc, comme $F \oplus G = F + G$:

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

$(ii \Rightarrow i)$ Supposons que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Alors, d'après 10.4, F et G sont en somme directe et donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \oplus G)$$

donc :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(E)$$

Comme $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que :

$$F \oplus G = E$$

□

Exercice 10.5 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$.On note également :

$$E = \mathbb{R}_n[x], \quad F = \mathbb{R}_{n-2}[x] \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^n - 1, X^{n-1} + X)$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Remarques

a. Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie et connue, c'est le plus souvent cette propriété qui servira pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

b. Lorsque E est un espace vectoriel de dimension infinie ou inconnue, on raisonnera le plus souvent par analyse-synthèse pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.

Proposition 10.12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n supérieure ou égale à 2.

i. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimensions respectives p et $n-p$ non nulles. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la concaténation d'une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de F et d'une base $(x_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$ de G est une base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

ii. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, tous distincts de $\{0\}$, admettant des bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$. E est somme directe de $F_1, \dots, F_p$ si et seulement si la concaténation $\mathcal{B}$ des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est une base de E.

Remarque Étant données deux familles $\mathcal{F}_1 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $\mathcal{F}_2 = (x_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant q}$ de vecteurs de E, on appelle concaténation des familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la famille $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ obtenue en « mettant bout à bout » les vecteurs de ces deux familles.

Preuve On note : $\dim(E) = n$.

i. Supposons que F et G soient supplémentaires dans E et considérons une base $\mathcal{F}$ et une base $\mathcal{G}$ respectivement de F et de G. D'après 10.5, la concaténation des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est alors une famille libre d'éléments de E. De plus, cette famille comporte $\dim(F) + \dim(G)$ vecteurs donc, n vecteurs de E, ce qui prouve qu'elle en forme une base.

Réciproquement, supposons que la famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G soit une base de E. En raisonnant comme dans la preuve de 10.9, on en déduit que F et G sont supplémentaires dans E.

ii. Ce résultat se déduit du précédent par récurrence.

□

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 10-1

- F est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition. De plus, la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à F, qui n'est donc pas vide et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(M, N) \in F^2$, on a :

$$^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN$$

et donc, comme M et N sont symétriques :

$$^t(\lambda M + N) = \lambda M + N$$

d'où :

$$\lambda M + N \in F$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

- G est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition. De plus, la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à G, qui n'est donc pas vide et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(M, N) \in F^2$, on a, en notant $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:

$$\lambda M + N = (\lambda m_{i,j} + n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

et comme M et N sont triangulaires inférieures :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i < j, \ \lambda m_{i,j} + n_{i,j} = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc :

$$\lambda M + N \in G$$

Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de E.

- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $F + G$ est inclus dans E. Soit alors $M \in E$. On note $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
  - Supposons alors qu'il existe un couple $(S,T) \in F \times G$ tel que : $M = S + T$. En notant $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 , \ m_{i,j} = s_{i,j} + t_{i,j}$$

et donc, comme T est triangulaire inférieure :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i < j, \ s_{i,j} = m_{i,j}$$

et comme S est symétrique :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i > j, \ s_{i,j} = s_{j,i} = m_{j,i}$$

et alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i > j, \ t_{i,j} = m_{i,j} - m_{j,i}$$

  - Considérons finalement les matrices $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 , \ s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \leqslant j \\ m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant j \\ m_{i,j} - m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases}$$

S est alors une matrices symétriques et T est une matrice triangulaire inférieure, et par ailleurs, on a bien : $M = S + T$, ce qui prouve que :

$$\forall M \in E, \ \exists (S,T) \in F \times G \ / \ M = S + T$$

et finalement que : $E \subset F + G$ et donc, comme $F + G \subset E$:

$$E = F + G$$

Correction de l'exercice 10-2

Comme F et G sont inclus dans E et comme E est un espace vectoriel, la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est aussi une somme de vecteurs de E et appartient donc à E, donc :

$$F + G \subset\subset E$$

De plus, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous le vecteur nul de E, et donc le vecteur 0_E appartient à $F+G$ (car on a $0_E = 0_E + 0_E$), qui n'est donc pas vide.
Soient alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et (x, y) un couple d'éléments de $F+G$. Par définition, il existe alors deux couples (x_F, x_G) et (y_F, y_G) de $F \times G$ tels que :

$$x = x_F + x_G \quad \text{et} \quad y = y_F + y_G$$

et alors :

$$\lambda x + y = \lambda(x_F + x_G) + (y_F + y_G) = (\lambda x_F + y_F) + (\lambda x_G + y_G)$$

Or, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$(\lambda x_F + y_F) \in F \quad \text{et} \quad (\lambda x_G + y_G) \in G$$

et donc :

$$\lambda x + y \in F + G$$

donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Enfin, on a :

$$\forall x \in F,\ x = x + 0_E \quad \text{et} \quad \forall y \in G,\ y = 0_E + y$$

ce qui prouve que x et y appartiennent à $F+G$ (car 0_E appartient à G et à F), et donc que F et G sont inclus dans $F+G$.

Correction de l'exercice 10-3

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de E. On a vu dans l'exercice 9.1 que, si l'on considère les matrices $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \leqslant j \\ m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant j \\ m_{i,j} - m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases}$$

alors on a :

$$S + T = M \quad \text{et} \quad (S, T) \in F \times G$$

Cependant, on peut se rendre compte qu'en choisissant les matrices S et T, les valeurs des coefficients diagonaux n'étaient imposées et l'on peut voir que si l'on considère les matrices $S' = (s'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $T' = (t'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ s'_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i < j \\ m_{i,i} - 1 & \text{si } i = j \\ m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad t'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ m_{i,j} - m_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases}$$

alors on a :

$$S' + T' = M, \quad (S', T') \in F \times G \quad \text{et} \quad (S, T) \neq (S', T')$$

ce qui prouve que la somme $F+G$ n'est pas directe.

Correction de l'exercice 10-4

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a déjà : $F + G \subset E$. Soit alors $f \in E$.

- *Analyse.* On suppose qu'il existe un couple (g, h) tel que $f = g + h$ et tel que g et h soient respectivement paire et impaire. On a alors :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases}$$

  et donc, comme g est paire et h impaire :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

et alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases} \tag{10.1}$$

Ainsi, on a prouvé dans cette partie que, s'il existe, un tel couple (g,h) est unique et défini par $(*)$.

◇ *Synthèse.* On considère maintenant les fonctions g et h définies par (10.1). g et h sont bien des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car f en est une) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

donc : $f = g + h$. Par ailleurs, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \\ h(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x) \end{cases}$$

donc g est paire et h est impaire.

Finalement, on a prouvé que :

$$\forall f \in E,\ \exists!\,(g,h) \in F \times G \ /\ f = g + h$$

d'où :

$$E = F \oplus G$$

Correction de l'exercice 10-5

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et on a :

$$\dim(F) = n - 1$$

et comme la famille $(X^n - 1, X^{n-1} + X)$ est libre (car formée de deux vecteurs non colinéaires) :

$$\dim(G) = 2$$

et donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = n + 1 = \dim(E)$$

Soit alors P un élément de $F \cap G$. Comme P appartient à G, il existe un couple (a,b) de réels tel que :

$$P = a\,(X^n - 1) + b\left(X^{n-1} + X\right)$$

Comme P appartient à F, P est de degré inférieur ou égal à $n-2$ donc les coefficients des termes de degrés n et $n-1$ sont nuls, donc : $a = b = 0$, et donc : $P = 0$. Comme 0 appartient à $F \cap G$, on en déduit que :

$$F \cap G = \{0\}$$

ce qui prouve finalement que F et G sont supplémentaires dans E.

Sommaire