9

Espaces vectoriels de dimension finie

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

Dans toute ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A. Généralités

A.1. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 9.1

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il ne contient que le vecteur nul ou s'il admet une famille génératrice contenant un nombre fini de vecteurs.
Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemples 9.1

a. D'après les résultats du chapitre 8, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

b. $E = \{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

c. L'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Proposition 9.2

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie, différent de $\{0\}$. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de vecteurs de E et si $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice de E, alors : $n \leqslant p$.

Théorème 9.3 ▶ Théorème de la dimension

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie, différent de $\{0\}$.

i. E admet une base.

ii. Toutes les bases de E ont la même longueur, appelée **dimension** de E et notée $\dim(E)$.

Par convention, on note : $\dim(\{0\}) = 0$.

Preuve

i. E étant de dimension finie, il admet une famille génératrice $\mathcal{F} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Comme E est différent de $\{0\}$, la famille $\mathcal{F}$ contient au moins un vecteur non nul y_1. Comme y_1 n'est pas le vecteur nul, la famille (y_1) est libre, donc il existe au moins une sous-famille de $\mathcal{F}$ qui soit libre. Considérons alors une sous-famille $\mathcal{G} = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de $\mathcal{F}$, libre de longueur maximale (c'est-à-dire que toute famille de $p+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ soit liée).

Montrons alors que $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $\mathcal{F}$. On renomme $y_{p+1}, \dots, y_n$ les $n-p$ autres vecteurs de $\mathcal{F}$. Soit $k \in [\![p+1, n]\!]$. Comme la famille $(y_1, \dots, y_p, y_k$ est liée (elle comporte $p+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$, donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda$ non tous nuls telle que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i + \lambda y_k = 0$$

Supposons alors que λ soit nul. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i = 0$$

et comme la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est libre :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

ce qui est absurde car l'un au moins des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda$ n'est pas nul. Ainsi, λ n'est pas nul et :

$$y_k = -\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda} y_i$$

et donc :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_p)$$

ce qui prouve que la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est génératrice de E, donc, comme elle est libre, que c'est une base de E.

ii. Considérons deux bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de E. Comme la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice de E et comporte n vecteurs de E et comme la famille $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre et comporte p vecteurs de E, la proposition 9.2, : $p \leqslant n$.
De même, en échangeant $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, on établit que : $n \leqslant p$, et finalement : $n = p$.

□

Théorème 9.4

i. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N},\ \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

iii. $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$.

A.2. Lien entre familles libres, familles génératrices et bases

Dans toute cette partie, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Proposition 9.5

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de p vecteurs de E.

i. Si la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est libre, alors : $p \leqslant n$,

ii. Si la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est génératrice de E, alors : $p \geqslant n$.

Remarques

a. Ces résultats découlent de manière immédiate de la proposition 9.2.

b. En conséquence de cette proposition, si E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n, toute famille comportant au moins $n+1$ vecteurs de E est nécessairement liée et toute famille contenant au plus $n-1$ vecteurs de E ne peut être génératrice de E.

Proposition 9.6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E,

ii. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre,

iii. la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice de E.

Remarque Bien retenir ce résultat, fondamental. En particulier, pour démontrer qu'une famille est une base de E, on démontrera le plus souvent qu'elle est libre et comporte autant de vecteurs de E que la dimension de E. En effet, il est en général plus simple de prouver qu'une famille est libre que de prouver qu'elle est génératrice de E.

Preuve $(i \Longrightarrow ii)$ Évident compte tenu de la définition d'une base.

$(ii \Longrightarrow iii)$ On suppose que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. Soit x un élément de E. La famille $(x_1, \ldots, x_n, x)$ comporte $n+1$ vecteurs de E et E est de dimension n, donc cette famille est liée, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda x = 0$$

Comme la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, λ ne peut être nul (car sinon $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda$ seraient tous nuls) et alors :

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$$

donc x appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, ce qui prouve que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de E.

$(iii \Longrightarrow i)$ Supposons que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une famille génératrice de E. Raisonnons par l'absurde et supposons que cette famille est liée. Quitte à permuter les vecteurs, on peut alors supposer que x_n est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et donc que :

$$E = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

donc la famille $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est génératrice de E et donc, comme E est de dimension n : $n-1 \geqslant n$, ce qui est absurde. Ainsi, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre et génératrice de E donc en forme une base. $\square$

Théorème 9.7 ► Théorème de la base incomplète

On suppose que : $1 \leqslant p < n$. Si E est un espace vectoriel de dimension n et si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il existe $n-p$ vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$ de E tels que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E.

B. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

B.1. Propriétés

Proposition 9.8

Si E est un espace vectoriel de dimension n et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

i. F est de dimension finie et : $\dim(F) \leqslant n$,

ii. si $\dim(F) = \dim(E)$, alors : $F = E$.

Preuve

i. Le cas où $F = \{0_E\}$ ne posant pas de problème, on suppose que $F \neq \{0_E\}$. Il existe alors une famille de vecteurs de F qui soit libre (puisque toute famille formée d'un vecteur non nul de F est libre). Comme tout vecteur de F appartient à E et comme E est de dimension n, une famille libre de vecteurs de F comporte donc au maximum n vecteurs. L'ensemble des longueurs des familles libres d'éléments de F est donc une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément p, inférieur ou égal à n.

Considérons alors une famille libre $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de F, de longueur maximale. En procédant comme dans la preuve de la proposition 9.6, on prouve alors que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est génératrice de F, donc c'est une base de F, qui est donc de dimension finie égale à p.

ii. Si $\dim(F) = \dim(E)$, il existe une base $\mathcal{F}$ de F formée de n éléments de F, donc de E. Cette famille est donc libre et formée de n vecteurs de E, qui est de dimension n, donc en forme une base, ce qui prouve que :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$$

□

Remarque Bien retenir cette proposition, et en particulier le deuxième point, qui sera la plus souvent utilisé pour démontrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

B.2. Sous-espaces vectoriels remarquables

Définition 9.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n. On appelle :

i. **droite vectorielle** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1,

ii. **plan vectoriel** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2,

iii. **hyperplan vectoriel** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Proposition 9.10

Soient E un espace vectoriel et D une droite vectorielle de E. Pour tout vecteur x **non nul** de D, (x) est une base de D, autrement dit :

$$\forall x \in D \setminus \{0\},\ D = \mathrm{Vect}(x)$$

Exercice 9.1 Démontrer la proposition 9.10.

B.3. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice

Définition 9.11

Si E est un espace vectoriel et si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, on appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

Définition 9.12

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En notant $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de M, le rang de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est aussi appelé rang de M, et noté $\mathrm{rg}(M)$.

Proposition 9.13

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^t M)$$

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 9-1

Soit x un vecteur non nul de D. Comme D est un espace vectoriel, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \in D$$

d'où :

$$\text{Vect}(x) \subset D$$

D'autre part, comme x n'est pas nul, $\text{Vect}(x)$ est de dimension 1, donc :

$$\dim(D) = \dim(\text{Vect}(x))$$

et donc, d'après 9.8 :

$$D = \text{Vect}(x)$$

D. Pour aller plus loin

Preuve de la proposition 9.2

On montre tout d'abord par récurrence que, pour tout entier naturel n, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « si un espace vectoriel F possède une famille génératrice de longueur n, alors toute famille de $n+1$ vecteurs de F est liée ».

- ◇ Si F est un espace vectoriel de dimension 0, alors $F = \{0\}$, donc toute famille d'au moins un vecteur de F contient le vecteur nul et est donc liée. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on considère un espace vectoriel G admettant une famille génératrice $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$.
  Soit $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ une famille de $n+2$ vecteurs de G. Comme $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est une famille génératrice de G, il existe une famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}}$ de scalaires telle que :

$$\forall i \in [\![1, n+2]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} x_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}_{=z_i} + \underbrace{\alpha_{i,n+1}}_{\alpha_i} x_{n+1}$$

  On note alors : $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. F est donc un espace vectoriel admettant une famille génératrice de longueur n, donc toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs de F est liée.
  Si les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$ sont tous nuls, alors les vecteurs de la famille $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ appartiennent tous à F donc cette famille est liée.
  On suppose désormais que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$ ne sont pas tous nuls. Pour simplifier les notations, on suppose que α_{n+2} n'est pas nul (les autres cas sont identiques). On a alors :

$$x_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+2}} (y_{n+2} - z_{n+2})$$

  et alors :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ y_i = z_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} (y_{n+2} - z_{n+2})$$

  et donc :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \underbrace{y_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} y_{n+2}}_{t_i} = z_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} z_{n+2}$$

  d'où :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ t_i \in F.$$

  Ainsi, la famille $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ est une famille de $n+1$ vecteurs de F, donc elle est liée et il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \left(y_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} y_{n+2} \right) = 0$$

et alors :
$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i + \left(- \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}} \right) y_{n+2} = 0$$
ce qui prouve finalement que la famille $(y_1, \dots, y_{n+2})$ est liée et donc que : $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve du théorème 9.7

Comme E est de dimension finie, il admet une base $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, qui est donc également une famille génératrice de E. On note alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_{p+i} = y_i$$
La famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+p}$ est alors une famille génératrice de E. On note alors F l'ensemble des parties de $[\![1, n+p]\!]$ contenant les entiers $1, 2, \dots, p$ et tels que la famille $(x_i)_{i \in I}$ soit libre et G l'ensemble des cardinaux des éléments de F :
$$F = \{ I \in \mathcal{P}([\![1, n+p]\!]) \ / \ [\![1, p]\!] \subset I \text{ et } (x_i)_{i \in I} \text{ est génératrice de } E \} \quad \text{et} \quad G = \{ \mathrm{Card}(I),\ I \in F \}$$
L'ensemble F contient $[\![1, n+p]\!]$ donc il n'est pas vide et G est donc une non vide et finie (car F est fini) de $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément q, compris entre p et $n+p$ par définition. En notant I un élément de F de cardinal q, on peut alors affirmer que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre de E et que, pour tout $j \in [\![p+1, n+p]\!]$ tel que j n'appartienne pas à I, x_j est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et donc :
$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n+p}) = \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I})$$
ce qui prouve que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est aussi une famille génératrice de E, donc que c'en est une base.

Sommaire