7 Matrices carrées

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

A. Vocabulaire

Définition 7.1

La matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients $m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n}$, qui sont égaux à 1, est appelée **matrice identité** ou **matrice unité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Définition 7.2

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients $m_{1,1}, \ldots, m_{i,i}, \ldots, m_{n,n}$ sont appelés coefficients diagonaux de M.

Définition 7.3

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que :

i. M est une **matrice diagonale** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i \neq j,\ m_{i,j} = 0$,

ii. M est une **matrice triangulaire supérieure** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i > j,\ m_{i,j} = 0$,

iii. M est une **matrice triangulaire inférieure** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i < j,\ m_{i,j} = 0$,

iv. M est triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou inférieure.

Exercice 7.1

1. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Le produit de deux matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il toujours une matrice triangulaire ?

B. Polynôme d'une matrice carrée

B.1. Puissances d'une matrice carrée

Définition 7.4

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la matrice M^k par la relation de récurrence :

$$M^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ M^{k+1} = MM^k = M^kM$$

Proposition 7.5

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall (p,k) \in \mathbb{N}^2,\ M^{p+k} = M^pM^k = M^kM^p$$

© www.stephaneperez.com

Exemple 7.1 Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et alors :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et donc :

$$\forall k \geqslant 3,\ M^k = M^3 M^{k-3} = 0$$

Remarque Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0$ est appelée **matrice nilpotente**.

Proposition 7.6

Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si M et N commutent alors, pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, M^k et N^p commutent.

Preuve On suppose que M et N commutent et on prouve tout d'abord par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{H}(p)$: « M^p et N commutent ».

- ◇ Si $p = 0$, alors $M^0 = I_n$ par convention et on a alors :

$$M^0 N = N = N M^0$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

- ◇ Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{H}(p)$ est vraie. On a :

$$M^{p+1} N = M^p M N$$

et donc, comme M et N commutent, ainsi que M^p et N :

$$\begin{aligned} M^{p+1} N &= M^p N M \\ &= N M^p M \\ &= N M^{p+1} \end{aligned}$$

donc : $\mathscr{H}(p) \Longrightarrow \mathscr{H}(p+1)$.

- ◇ Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

Soit alors $p \in \mathbb{N}$. Comme M^p et N commutent, on déduit alors de la récurrence précédente (en substituant M^p à N et N à M) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^p et N^k commutent.

□

Proposition 7.7

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si D est une matrice diagonale et si ses coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $d_1, \ldots, d_n$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $d_1^k, \ldots, d_p^k$.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Proposition 7.8 ▶ Formule du binôme de Newton

Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si M et N commutent, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (M+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k M^{p-k}$$

Remarques

a. Comme pour tout résultat mathématique, il est fondamental de ne pas oublier les hypothèses (M et N commutent) avant d'appliquer ce résultat. Très souvent, l'une des matrices sera du type λI_n et la commutativité sera immédiate dans ce cas.

b. En pratique, cette formule n'a d'intérêt que si les puissances des matrices M et N sont simples à calculer, soit parce que ces matrices sont simples (matrice diagonale, matrice nilpotente), soit par qu'il est simple de conjecturer un résultat par récurrence.

Preuve Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}(p)$ la proposition :

$$\text{« } (M+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p-k} \text{ »}$$

et on démontre par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

◇ Par convention, on a : $(M+N)^0 = I_n$ et :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} M^k N^{0-k} = \binom{0}{0} M^0 N^0 = I_n$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

◇ Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{H}(p)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(M+N)^{p+1} &= (M+N)(M+N)^p \\ &= (M+N) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^{k+1} N^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p+1-k}\end{aligned}$$

soit encore, en effectuant le changement d'indice $k := k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(M+N)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} M^k N^{p+1-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k}\right] M^k N^{p+1-k} + N^{p+1} - \binom{p}{p+1} M^{p+1}\end{aligned}$$

et alors, d'après la formule du triangle de Pascal et en remarquant que $\binom{p}{p+1} = 0$:

$$\begin{aligned}(M+N)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} M^k N^{n+1-k} + N^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} M^k N^{n+1-k}\end{aligned}$$

et donc : $\mathscr{H}(p) \Longrightarrow \mathscr{H}(p+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout entier naturel p, ce qui prouve le résultat annoncé.

□

© www.stephanepreteseille.com

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

B.2. Polynômes de matrices carrées

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul.

Définition 7.9

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout polynôme P tel que $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ de $\mathbb{R}_n[x]$, la matrice

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$$

est appelée polynôme en M.
On dira que le polynôme P est un **polynôme annulateur** de M si $P(M)$ est la matrice nulle.

Exercice 7.2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le polynôme $P(x) = (x+1)^3$ est un polynôme annulateur de A.

Remarques

a. On rappelle que, pour toute matrice carrée M, on a, par convention : $M^0 = I$.

b. Attention au coefficient constant du polynôme.
Par exemple, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(x) = x^2 + x + \boxed{2}$, alors : $P(M) = M^2 + M + \boxed{2I}$.

c. Les propriétés suivantes se déduisent de manière immédiate des propriétés des polynômes et des puissances de matrices :

Proposition 7.10

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

i. $\forall P \in \mathbb{R}[x],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda P)(M) = \lambda\, P(M)$,

ii. $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[x])^2,\ (P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$,

iii. $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[x])^2,\ (PQ)(M) = P(M) \times Q(M) = Q(M) \times P(M)$.

C. Matrices carrées inversibles

C.1. Généralités

Définition 7.11

Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On dit que M est **inversible** s'il existe une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$MN = NM = I_n.$$

Lorsqu'elle existe, une telle matrice N est appelée **inverse** de N et notée M^{-1}.
Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarques

a. La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible.

b. La notion d'inversibilité n'a de sens que pour les matrices carrées. En effet, même si M et N sont deux matrices rectangulaires telles que les produits MN et NM existent, les matrices MN et NM ne sont de même format (et ne peuvent donc être égales) que si M et N sont carrées).

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Exercice 7.3 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(M - I_3)^3 = 0$.
2. En développant $(M - I_3)^3$ et en factorisant M, en déduire que M est inversible et préciser la matrice M^{-1}.

Remarques

a. Bien retenir cet exemple, dont la méthode s'avérera très utile dans un grand nombre de situations.

b. On verra plus tard d'autres méthodes pratiques pour étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer son inverse éventuelle.

Définition 7.12

Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

i. On dit que M est inversible à gauche s'il existe une matrice N (appelée inverse de M à gauche) telle que : $NM = I_n$.

ii. On dit que M est inversible à droite s'il existe une matrice M (appelée inverse de N à droite) telle que : $MN = I_n$.

Théorème 7.13

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. M est inversible,

ii. il existe une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = I_n$,

iii. il existe une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $NM = I_n$.

De plus, dans les points *ii* et *iii*, on a : $M^{-1} = N$.

Remarques

a. Ce résultat sera démontré dans le chapitre 8. Espaces vectoriels.

b. Ainsi une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite (ou à gauche) et dans ce cas l'inverse, l'inverse à gauche et l'inverse à droite sont égales.

Proposition 7.14

Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

iii. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iv. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

v. Si A est inversible, alors : $AB = AC \Longrightarrow B = C$.

Remarque Attention en particulier au dernier point. En effet, l'égalité $AB = AC$ n'implique pas en général que les matrices B et C soient égales, même si A n'est pas la matrice nulle. Par exemple, on peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.4 Démontrer la proposition 7.14.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

C.2. Lien avec les systèmes linéaires

Théorème 7.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. A est inversible,

ii. pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

iii. le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarques

a. Une preuve de ce théorème sera proposée dans le chapitre 10 Applications linéaires.

b. Le théorème 7.15 est particulièrement utile pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée.

Exemple 7.2 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3y = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow x = y = 0 \\ &\Longrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que M est inversible.

Remarques

a. Bien retenir la méthode utilisée ici, qui sera très souvent utilisée pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée. Attention cependant, elle est inutile si l'on souhaite déterminer l'inverse !

b. En revanche, elle peut être adaptée pour déterminer l'inverse d'une matrice. En effet, on peut remarquer que, si A est inversible, l'unique solution X de l'équation $AX = Y$ est nécessairement $X = A^{-1}Y$.

Méthode 7.16

Pour étudier l'inversibilité et, le cas échéant, déterminer l'inverse d'une matrice A carrée d'ordre n, on peut résoudre, pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque fixé, le système linéaire $AX = Y$, par exemple à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Proposition 7.17

Une matrice **triangulaire** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.
Par conséquent, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Remarques

a. Ce résultat a été démontré dans le chapitre 6.. Calcul matriciel et systèmes linéaires.

b. ATTENTION !!! Ce résultat n'est vrai que si la matrice M est triangulaire. Par exemple, si l'on considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

alors on peut remarquer que :

$$MM = I_2,$$

ce qui prouve que M est inversible (d'inverse M), bien que ses coefficients diagonaux soient nuls.

Exemple 7.3 On reprend l'exemple précédent. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
MX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -3x_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}\, y_1 + \dfrac{2}{3}\, y_2 \\[2ex] x_2 = \dfrac{2}{3}\, y_1 - \dfrac{1}{3}\, y_2 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}$$

ce qui prouve que M est inversible et que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.5

1. Étudier l'inversibilité et, le cas échéant, déterminer l'inverse, de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Même question avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 7.18

Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ sont **tous** non nuls et dans ce cas, D^{-1} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\dfrac{1}{d_1}, \dots, \dfrac{1}{d_n}$.

Preuve

- ◇ Une matrice diagonale est triangulaire, donc d'après 7.15, D est inversible si et seulement si $d_1, \dots, d_n$ sont tous non nuls.
- ◇ On suppose maintenant que $d_1, \dots, d_n$ de D sont tous non nuls, on peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{d_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{d_2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{1}{d_n} \end{pmatrix} = I_n$$

ce qui prouve le résultat attendu.

□

www.stephanepreteseille.com ©

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

C.3. Le cas des matrices carrées d'ordre 2

Définition 7.19

Soit M une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On appelle **déterminant** de M le réel : $\det(M) = ad - bc$.

Proposition 7.20

Soit M une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors M est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul et on a, dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7.6 On se propose de démontrer la proposition 7.20. Pour cela, on considère une famille (a, b, c, d) d'éléments de $\mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que : $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)\, I_2 = 0$.
2. On suppose que : $ad - bc \neq 0$. Déduire du résultat précédent que M est inversible et déterminer son inverse.
3. On suppose maintenant que $ad - bc = 0$. Montrer que M n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde).

C.4. Étude de l'inversibilité : méthode du pivot de Gauss

Dans ce paragraphe, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Définition 7.21

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les opérations suivantes sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes** de M (où i et j sont deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$) :

i. échanger les lignes i et j (opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$),

ii. multiplier la ligne i par un scalaire α **non nul** (opération notée $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$),

iii. ajouter un multiple de ligne j à la ligne i (opération notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_i$).

Lorsqu'on effectue une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M, la matrice obtenue est dite équivalente à M.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Proposition 7.22

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et α,β deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha \neq 0$.

i. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$ équivaut à multiplier M à gauche par la matrice diagonale

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ii. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha\, L_i + \beta\, L_j$ équivaut à multiplier M à gauche par la matrice triangulaire (supérieure si $i<j$, inférieure sinon) :

$$T_{\alpha,\beta} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & \beta & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ j^{\text{ème}} \\ \text{colonne} \end{matrix} \end{array}$$

iii. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ équivaut à multiplier à gauche par la matrice

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ i^{\text{ème}} & & j^{\text{ème}} \\ \text{colonne} & & \text{colonne} \end{matrix} \end{array}$$

Remarque On vérifie sans mal que les matrices D_α et $T_{\alpha,\beta}$ sont triangulaires et qu'aucun de leurs coefficients diagonaux ne sont nuls si $\alpha \neq 0$, donc que ces matrices sont inversibles. De plus, on peut remarquer que $P^2 = I_n$, donc P est inversible (et $P^{-1} = P$). On en déduit de manière immédiate les résultats suivants :

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Théorème 7.23

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est inversible si et seulement si toute matrice déduite de M par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes est inversible.

Remarque Puisqu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une certaine matrice inversible, une idée pour étudier l'inversibilité de M peut être de partir de l'égalité $M = I_n M$ et d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de M jusqu'à en déduire la matrice I_n : cela revient en effet, lorsque cela est possible, à multiplier successivement par des matrices $P_1, \dots, P_n$ à gauche jusqu'à obtenir une égalité de la forme $I_n = (P_n P_{n-1} \dots P_1)M$, qui permet d'affirmer que M est inversible et que son inverse est $M^{-1} = P_n P_{n-1} \dots P_1$. Cela nous conduit à proposer la méthode suivante :

Méthode 7.24 ► Inversibilité d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

Pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et, le cas échéant, déterminer son inverse, on peut partir de l'égalité $M = I_n M$ puis effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de M et de I_n (les mêmes sur les deux matrices), en procédant comme suit :

1. Si les coefficients de la première colonne de M sont tous nuls, M n'est pas inversible.
2. Si l'un au moins des coefficients de la première colonne de M n'est pas nul, alors :
   - si $m_{1,1} = 0$, et si l'un au moins des coefficients de la première colonne n'est pas nul, on échange L_1 avec L_i où L_i est une ligne dont le premier coefficient n'est pas nul (on suppose pour la suite que $m_{1,1} \neq 0$), $m_{1,1}$ est appelé premier **pivot**,
   - pour tout entier i compris entre 2 et n, on effectue l'opération élémentaire :
   $$L_i \leftarrow m_{1,1}\, L_i - m_{i,1}\, L_1$$
   ces opérations ont pour effet d'annuler tous les coefficients de la première colonne, sauf le premier,
   - on reproduit ensuite le raisonnement sur la sous-matrice formée par les $n-1$ dernières colonnes et les $n-1$ dernières lignes, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une matrice triangulaire : si la matrice triangulaire T ainsi obtenue (appelée **réduite de Gauss** de M) est inversible (c'est-à-dire si tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls), alors M est également inversible, sinon, M n'est pas inversible.
3. Dans le cas où l'on a abouti à une équivalence du type
   $$M = I_n M \iff T = PM$$
   où T est une matrice triangulaire inversible, on poursuit les opérations élémentaires sur les lignes de T et de P, jusqu'à déduire de T la matrice I_n et aboutir à une équivalence de la forme
   $$M = I_n M \iff I_n = QM$$
   qui permet d'affirmer que : $M^{-1} = Q$; pour cela, on procède comme dans les premiers points mais en partant de la dernière colonne, puis l'avant dernière, et ainsi de suite.

Exemple 7.4 Ce long discours étant sans doute obscur, empressons nous de l'éclaircir par deux exemples lumineux et étudions ainsi l'inversibilité des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. On a :

$$A = I_3 A \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

$$A = I_3 A \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$
$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} A$$

La matrice T est triangulaire et l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, donc elle n'est pas inversible, donc, comme elle est déduite de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, A n'est pas inversible.

2. De même, on a :

$$B = I_3 B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$
$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B$$

La matrice T est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible, ce qui permet d'affirmer que B est inversible. On poursuit donc les opérations, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$B = I_3 B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$
$$\iff I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B$$

ce qui nous permet de conclure que B est inversible et :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.7 Étudier l'inversibilité des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

© www.stephanepreteseille.com

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 7-1

1. Soient M et N deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note :

$$M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où l'on a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i > j,\ m_{i,j} = n_{i,j} = 0$$

On note également :

$$MN = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où l'on a donc, par définition du produit matriciel :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, n_{k,j}$$

et comme $m_{i,k} = 0$ si $i > k$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} m_{i,k}\, n_{k,j}$$

et comme $n_{k,j} = 0$ si $k > j$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ / \ i > j,\ p_{i,j} = 0$$

donc :

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.

N.B. On démontre de manière analogue que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

2. On peut remarquer que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, les matrices M et N étant triangulaires :

Le produit de deux matrices triangulaires n'est pas toujours une matrice triangulaire

Correction de l'exercice 7-2

Si on note $P(x) = (x+1)^3$, alors on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= (A+I)^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc :

$\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } A}$

© www.stephanepreteseille.com
© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Correction de l'exercice 7-3

1. On a :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{(M - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0}$$

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a alors :

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I_3 = 0$$

et donc :

$$M^3 - 3M^2 + 3M = I_3$$

donc, en factorisant M à gauche (respectivement à droite) :

$$M\left(M^2 - 3M + 3I_3\right) = \left(M^2 - 3M + 3I_3\right) M$$

et donc :

$$\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = M^2 - 3M + 3I_3}$$

Correction de l'exercice 7-4

i. On suppose que A est inversible. On a alors :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

ce qui prouve que A^{-1} est inversible à gauche, d'inverse à gauche A, donc, d'après 7.13 et comme A^{-1} est une matrice carrée :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est inversible, alors } A^{-1} \text{ est inversible et : } (A^{-1})^{-1} = A}$$

ii. On suppose que A est inversible. En tranposant l'égalité $AA^{-1} = I_n$, on obtient :

$${}^t(A^{-1})\, {}^tA = I_n$$

ce qui prouve que ${}^tA$ est inversible à gauche, d'inverse à gauche ${}^t\left(A^{-1}\right)$, donc, comme ${}^tA$ est une matrice carrée :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est inversible, alors } {}^tA \text{ est inversible et : } ({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)}$$

iii. On suppose que A et B sont inversibles. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

© www.stephanepreteseille.com

ce qui nous permet de conclure, comme AB est une matrice carrée :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont inversibles, alors } AB \text{ est inversible et : } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

iv. On suppose que AB est inversible. Il existe alors une matrice C telle que :

$$(AB)C = C(AB) = I_n$$

et alors :

$$A(BC) = I_n \quad \text{et} \quad (CA)B = I_n$$

ce qui prouve que A est inversible à droite et que B est inversible à gauche, nous permettant de conclure, comme A et B sont deux matrices carrées :

$$\boxed{\text{Si } AB \text{ est inversible, alors } A \text{ et } B \text{ sont inversibles}}$$

v. On suppose que A est inversible. On a alors :

$$\begin{aligned} AB = AC &\Longrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Longrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Longrightarrow B = C \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7-5

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = Y &\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 + 4x_3 = y_1 + y_2 \\ -2x_2 - 8x_3 = -3y_1 + y_3 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ &\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 + 4x_3 = y_1 + y_2 \\ 0 = -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}}_{(S_Y)} \end{aligned}$$

Pour $Y = 0$, le système (S_Y) admet une infinité de solutions, donc on peut conclure :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$$

www.stephanepreteseille.com ©

2. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} BX = Y &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_3 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_2 \\ 3x_2 = -2y_1 + y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6}\,y_1 + \dfrac{1}{2}\,y_2 + \dfrac{1}{6}\,y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{6}\,y_1 - \dfrac{1}{2}\,y_2 + \dfrac{1}{6}\,y_3 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}\,y_1 + \dfrac{1}{3}\,y_3 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

Correction de l'exercice 7-6

1. On a :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et alors :

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\,I_2 = 0}$$

2. Comme $ad - bc \neq 0$, on a, d'après le résultat précédent :

$$(a+d)M - M^2 = (ad-bc)\,I_2$$

et donc :

$$\frac{1}{ad-bc}\,[(a+d)\,I_2 - M]\,M = I_2$$

En posant $N = \dfrac{1}{ad-bc}\,[(a+d)\,I_2 - M]$, on a alors : $NM = I_2$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } ad - bc \neq 0,\ M \text{ est inversible et :} \\ M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\,[(a+d)\,I_2 - M] = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}}$$

www.stephanepreteseille.com ©

3. Comme $ad - bc = 0$, on a :
$$M^2 - (a+d)\,M = 0$$
Raisonnons alors par l'absurde et supposons que M soit inversible. En multipliant par M^{-1}, on obtient alors :
$$M - (a+d)\,I_2 = 0$$
c'est-à-dire :
$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$
et donc :
$$a = b = c = d = 0$$
donc $M = 0$, ce qui contredit l'hypothèse d'inversibilité de M, donc M n'est pas inversible. On peut alors conclure :
$$\boxed{\text{Si } ad - bc = 0, \text{ alors } M \text{ n'est pas inversible}}$$

Correction de l'exercice 7-7

- On applique la méthode du pivot de Gauss. On a :

$$\begin{aligned}
M = I_4 M \iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M && \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} M && L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
\iff & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} M
\end{aligned}$$

La matrice T est triangulaire et l'un de ses coefficient diagonaux est nul, donc elle n'est pas inversible, ce qui nous permet de conclure :
$$\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$$

- Compte tenu de la première ligne de N, on peut adapter un peu la méthode en cherchant une matrice triangulaire inférieure, déduite de N par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned}
N = I_4 N \iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N && L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
\iff & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N
\end{aligned}$$

© www.stephanepreteseille.com

La matrice T est triangulaire et aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul, donc elle est inversible. Par conséquent on peut déjà affirmer que N est inversible. On poursuit donc les opérations, en faisant $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\begin{aligned}
N = I_4 N \iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} N \qquad L_4 \leftarrow 3L_4 + 2L_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} N
\end{aligned}$$

et donc, en divisant la deuxième et la quatrième ligne par 3, la troisième ligne par -3 :

$$N = I_4 N \iff I_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} N$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{N \text{ est inversible et } N^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

www.stephanepreteseille.com ©

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Sommaire

www.stephanepreteseille.com

©