5 Généralités sur les polynômes

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

Les démonstrations de ce chapitre n'étant pas exigibles, la plupart des résultats de ce chapitre sont admis. Les démonstrations proposées pourront être traitées en guise d'exercice.

A. Polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

A.1. Généralités

Définition 5.1

On appelle fonction polynôme, ou polynôme, à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe un entier naturel n et une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés coefficients de P.

Notation 5.2

L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $x \mapsto x^n$ est noté X^n.
Plus généralement, le polynôme $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pourra aussi être noté $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Exemple 5.1 Les fonctions $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto -2x^3+5x+2$ sont des fonctions polynômes à coefficients réels.

Définition 5.3

On appelle **polynôme nul** et on note $P = 0$ le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

Théorème 5.4

Soit P une fonction polynôme à coefficients réels, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

P est le polynôme nul si et seulement si et seulement si ses coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont tous nuls.

Exercice 5.1 On se propose de démontrer le théorème précédent, et on considère pour cela une fonction polynôme $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ à coefficients réels.

Il est évident que, si tous les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont nuls, alors la fonction P est constante nulle. On se propose maintenant d'établir la réciproque de cette propriété et l'on suppose donc que P est constante nulle.

1. Justifier que : $a_0 = 0$.

2. On suppose que l'un au moins des coefficients de P n'est pas nul et on note i le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k x^k$$

On rappelle qu'une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$. En factorisant x^i dans l'expression de $P(x)$, établir une contradiction.

Remarque Le résultat suivant s'en déduit de manière immédiate :

Proposition 5.5

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Les polynômes P et Q sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$P = Q \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$$

Définition 5.6

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme dont l'un au moins des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ n'est pas nul.

1. On appelle **degré** de P le plus grand entier naturel k tel que $a_k \neq 0$; le degré de P est noté $\deg(P)$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k x^k$ est appelé **monôme** de degré k et a_k est appelé **coefficient** du monôme de degré k du polynôme P.
3. On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient $a_{\deg(P)}$ et **monôme dominant** de P le monôme $a_{\deg(P)} x^{\deg(P)}$.

Par convention, on convient de noter : $\deg(0) = -\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Exemples 5.2

a. Le polynôme $P : x \mapsto 3x^2 - 1$ est un polynôme à coefficients réels de degré 2 et de coefficient dominant 3,

b. Le polynôme $P : x \mapsto 2 - 3x^2 + 5x^3$ est un polynôme à coefficients réels de degré 3 et de coefficient dominant 5.

Remarques

a. Comme nous serons amenés, à plusieurs reprises, à effectuer des comparaisons sur les degrés, nous adopterons la convention naturelle : $-\infty < 0$. Cela nous évitera de traiter séparément le cas du polynôme nul.

b. Tout polynôme non nul a au moins un coefficient non nul, donc tout polynôme non nul admet un degré et la définition a bien un sens.

A.2. Structure de l'ensemble des polynômes

Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels, tel que :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Définition 5.7

On appelle somme des polynômes P et Q le polynôme $P+Q$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k$$

Exemple 5.3 Si $P : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ et $Q : x \mapsto -x^3 - x^2 + x$, alors $P+Q$ est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P+Q)(x) = -x^3 + 4x - 1$$

Définition 5.8

On appelle produit du polynôme P par un réel λ, appelé **scalaire**, le polynôme $\lambda \cdot P$, plus simplement noté λP, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda P)(x) = \lambda P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

Définition 5.9

On appelle produit des polynômes P et Q le polynôme $P \times Q$, plus simplement noté PQ, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) = P(x)\, Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$$

où l'on a posé :

$$\forall k \geqslant n+1,\ a_k = b_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, 2n]\!]\,,\ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P^n par la relation de récurrence :

$$P^0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P^{n+1} = P \times P^n$$

Remarque La valeur des coefficient c_k s'obtenant facilement avec les propriétés usuelles de la multiplication et de la division, il est peu utile de chercher à retenir la formule, mais plus intéressant de savoir la retrouver. On pourra ainsi remarquer que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) &= P(x)\, Q(x) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}\end{aligned}$$

On remarque alors que, le terme de plus hait degré possible est cdelui dee degré $2n$ et que, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, le coefficient du monôme de degré k est la somme de tous les coefficients $a_i b_j$ pour les indices i et j tels que $i + j = k$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+k=k} a_i b_j x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} x^k\end{aligned}$$

Exemples 5.4 **a.** Si $P : x \mapsto x - 1$ et $Q : x \mapsto x + 1$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) = x^2 - 1$$

b. Si $P : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ et $Q : x \mapsto -x^3 - x^2 + x$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) = -x^5 - 4x^4 - x^3 + 4x^2 - x$$

Proposition 5.10

Pour tout triplet de polynômes (P, Q, R), on a :

i. $P + Q = Q + P$ (l'addition est commutative),

ii. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ (l'addition est associative),

iii. $PQ = QP$ (la multiplication est commutative),

iv. $(PQ)R = P(QR)$ (la multiplication est associative),

v. $PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$.

Proposition 5.11

Soient P et Q deux polynômes non nuls. On a :

i. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,

ii. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$,

iii. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \deg(\lambda P) = \deg(P)$.

Remarques

a. Attention, si P et Q sont deux polynômes, le degré de $P+Q$ n'est pas nécessairement égal au plus grand des degrés de P et de Q. Par exemple, si $P : x \mapsto x^3+1$ et $Q : x \mapsto -x^3+2x^2+7$, alors $P + Q : x \mapsto 2x^2 + 8$ est de degré 2, alors que P et Q sont de degré 3.

b. On en déduit de manière immédiate le résultat suivant :

Proposition 5.12

Soit n un entier naturel. On a :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[x].$$

Proposition 5.13 ▶ Formule du binôme de Newton

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[x]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Exercice 5.2

1. Démontrer la formule du binôme de Newton (on pourra procéder par récurrence sur n).
2. Soit n un entier naturel non nul. On pose : $P : x \mapsto (x + 1)^n$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $Q : x \mapsto P(x + 1) - P(x)$.

A.3. Polynôme dérivé

Définition 5.14

Soient n un entier naturel et $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme à coefficients réels.

i. On appelle **polynôme dérivé** ou **dérivée** de P le polynôme noté P' et défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Si n est nul, on convient que P' est le polynôme nul.

ii. Plus généralement, on construit par récurrence la suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ des **dérivées successives** de P en posant :

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ est appelé dérivée $k^{ème}$ du polynôme P.

Remarques

a. Bien noter l'importance des parenthèses dans la notation des dérivées successives pour éviter de confondre puissance et dérivée.

b. On note aussi P'' le polynôme $P^{(2)}$ et P''' le polynôme $P^{(3)}$.

Exercice 5.3 On considère le polynôme $P : x \mapsto 2x^3 - 3x - 1$. Expliciter $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.4 Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n.

1. Que peut-on dire du degré de P' ?
2. Plus généralement, déterminer le degré de $P^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.15

Étant donnés deux polynômes P et Q, un réel λ, et un entier naturel k, on a :

1. $(\lambda P)' = \lambda P'$
2. $(\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$
3. $(P+Q)' = P' + Q'$
4. $(P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$.
5. $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Théorème 5.16 ▶ Formule de Leibniz

Étant donnés deux polynômes P et Q et un réel λ, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Exercice 5.5 Démontrer le théorème 5.16.

Proposition 5.17

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n le polynôme $x \mapsto x^n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ (X^n)^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 5.6 Démontrer la proposition 5.17

Théorème 5.18 ▶ Formule de Taylor pour les polynômes

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[x]$ et λ un réel. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (x-\lambda)^k$$

Exercice 5.7 On se propose de démontrer le théorème 5.18. Pour cela, on considère un polynôme P et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $P^{(k)}(x)$ sous forme de somme.
2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

3. Prouver alors que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\, (x-a)^k$$

B. Division euclidienne

B.1. Théorème de la division euclidienne

Théorème 5.19

Soient A et B deux polynômes. On suppose que B n'est pas le polynôme nul. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

On dit alors que Q est le **quotient** et que R est le **reste** de la division euclidienne (ou de la division suivant les puissances décroissantes) de A par B.

Méthode 5.20

En pratique, la division euclidienne peut se faire avec les mêmes méthodes que la division « usuelle » sur les entiers. Si $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, on procèdera comme suit :

i. on considère le terme de plus haut degré $a_n x^n$ de A, que l'on divise par le terme de plus haut degré $b_p x^p$ de B, pour obtenir $\dfrac{a_n}{b_p}\, x^{n-p}$,

ii. on pose $\dfrac{a_n}{b_p}\, x^{n-p}$ au quotient,

iii. on retranche $\dfrac{a_n}{b_p}\, x^{n-p}\, B$ à A pour obtenir un premier reste A_1,

iv. on reproduit le raisonnement avec A_1 et B, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un reste de degré strictement inférieur au degré de B.

Exemple 5.5 Pour déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $A : x \mapsto x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$ par $B : x \mapsto x^2 - x + 2$, on pose la division :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & +1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{7-7}
-(x^5 & -x^4 & +2x^3) & & & +1 & x^3 + 3x^2 - 6 \\ \cline{1-3}
 & 3x^4 & -3x^3 & & & +1 & \\
 & -(3x^4 & -3x^3 & +6x^2) & & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & & -6x^2 & & +1 & \\
 & & & -(-6x^2 & +6x & -12) & \\ \cline{4-6}
 & & & & -6x & +13 &
\end{array}$$

Pour effectuer cette division, on a :

- divisé le monôme de plus haut degré de A (x^5) par le monôme de plus haut degré de B (x^2), ce qui donne x^3,
- posé x^3 dans le quotient,
- retenu $x^3B(x) = x^5 - x^4 + 2x^3$ à A, donnant un reste égal à $3x^4 - 3x^3 + 1$, de degré supérieur ou égal au degré de B,
- divisé le monôme de plus haut degré de $3x^4 - 3x^3 + 1$ (donc $3x^4$) par le monôme de plus haut degré de B (x^2), ce qui donne $3x^2$,
- posé $3x^2$ au quotient et retranché $3x^2B(x) = 3x^4 - 3x^3 + 6x^2$ au reste, ce qui donne un reste égal à $-6x^2 + 1$, encore de degré supérieur ou égal au degré de B,
- divisé le monôme de plus haut degré de $-6x^2+1$ (donc $-6x^2$) par le monôme de plus haut degré de B (x^2), ce qui donne -6,
- posé -6 au quotient et retranché $-6B(x)$ au reste, ce qui donne un reste égal à $-6x+13$, finalement de degré strictement inférieur au degré de B.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x^3 + 3x^2 - 6)B(x) + (-6x + 13)$$

ce qui signifie que le quotient de la division euclidienne de A par B est $Q : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 6$, tandis que le reste est $R : x \mapsto -6x + 13$.

Exercice 5.8

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $x \mapsto x^7 - 2x^3$ par $x \mapsto x^2 - 1$.
2. Effectuer la division euclidienne de $x \mapsto x^5 - 3x^4 + 2$ par $x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$.
3. Effectuer la division euclidienne de $x \mapsto x^{10} - 1$ par $x \mapsto x^2 - 1$.

Exercice 5.9 Soient A et B deux polynômes, tous deux non nuls. On note respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B. Déterminer une expression du degré de Q en fonction du degré de A et de B.

B.2. Multiples et diviseurs d'un polynôme

Définition 5.21

Soient A et B deux polynômes. On dit que B est un **diviseur** de A (ou que B divise A, ou encore que A est un **multiple** de B) s'il existe un polynôme Q tel que : $A = BQ$.
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ ne possédant pas d'autre diviseur que 1 et lui-même est dit irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

Remarques

a. On peut remarquer que, lorsque B n'est pas le polynôme nul, B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

b. En particulier, tous les polynômes divisent le polynôme nul, mais le seul le polynôme nul est divisible par le polynôme nul.

Exercice 5.10 Les polynômes $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $x \mapsto x^4 + 2x^2 + x - 1$ sont-ils divisibles par le polynôme $x \mapsto x^2 - 3x + 2$?

C. Racines d'un polynôme, factorisation

C.1. Racines d'un polynôme

Définition 5.22

Soit P un polynôme On dit qu'un réel λ est **racine** de P si $P(\lambda) = 0$.

Exemples 5.6 **a.** On peut vérifier que 2 et 3 sont racines du polynôme $x \mapsto x^2 - 5x + 6$.

b. Le polynôme $P : x \mapsto x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.

C.2. Factorisation

Théorème 5.23

Soit P un polynôme. Un réel λ est racine de P si et seulement si le polynôme $x \mapsto x - \lambda$ divise P.

Preuve Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 5.19 de la division euclidienne, comme $x \mapsto x - \lambda$ est un polynôme de degré 1, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P = (x - \lambda)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 1$$

Il en découle que R est un polynôme constant, que l'on note plus simplement r et alors, en évaluant en λ :

$$P(\lambda) = r$$

donc λ est racine de P si et seulement si $r = 0$, donc si et seulement si $x \mapsto x - \lambda$ divise P. $\square$

Exercice 5.11 En remarquant que 1 et 2 sont racines de A, prouver que le polynôme $B : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ divise le polynôme $A : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Exercice 5.12 Soient A et B deux polynômes.

1. Montrer que, si B divise A, alors toute racine de B est aussi racine de A.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Théorème 5.24

Soit P un polynôme et $p \in \mathbb{N}^*$.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des racines distinctes de P, alors le polynôme $x \mapsto \prod_{k=1}^{p} (x - \lambda_k)$ divise P.

Théorème 5.25

Soit P un polynôme et n un entier naturel. Si P est de degré n, alors P admet au plus n racines distinctes.

Preuve Si P n'a pas de racine, le résultat énoncé est vrai. On suppose désormais que P admet au moins une racine et on note p le nombre de ses racines réelles et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces racines. On note enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - \lambda_k)$$

D'après le théorème 5.23, le polynôme B divise P, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$P = BQ$$

On a alors, comme B et Q ne sont pas nuls (car P n'est pas nul) :

$$\deg(P) = \deg(B) + \deg(Q) = p + \deg(Q)$$

et donc, comme P est de degré n :

$$p = n - \deg(Q)$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Théorème 5.26

Soit n un entier naturel et P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[x]$. Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Preuve On raisonne par l'absurde en supposant que P n'est pas le polynôme nul. D'après le théorème 5.25, on a alors :

$$\deg(P) \geqslant n+1$$

ce qui est absurde puisque P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. □

Remarque Ce résultat est fondamental car il servira très souvent pour démontrer qu'un polynôme est nul.

C.3. Racines multiples d'un polynôme

Définition 5.27

Soit P un polynôme λ un réel et k un entier naturel non nul. On dit que λ est racine d'**ordre de multiplicité** k de P si :

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!]\,,\ P^{(i)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\lambda) \neq 0$$

Remarques

a. Si λ est une racine d'ordre 1 de P, on dit aussi que λ est une racine simple de P.

b. Si λ est une racine d'ordre 2 de P, on dit aussi que λ est une racine double de P.

Théorème 5.28

Soit P un polynôme, λ un réel et k un entier naturel non nul. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si et seulement si $x \mapsto (x-\lambda)^k$ divise P et $x \mapsto (x-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P.

Théorème 5.29

Soient P un polynôme, λ un réel et k un entier naturel non nul.

$$\lambda \text{ est racine d'ordre } k \text{ de } P \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, Q \in \mathbb{R}[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)^k\, Q(x) \ \text{ avec } \ Q(\lambda) \neq 0$$

Preuve

◇ Supposons que λ soit racine d'ordre k de P. Alors $x \mapsto (x-\lambda)^k$ divise P et il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P = (x-\lambda)^k Q(x)$$

Supposons alors que $Q(\lambda) = 0$. Alors λ est racine de Q, donc $x \mapsto x - \lambda$ divise Q et il existe un polynôme R tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x-\lambda)R(x)$$

et alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)^{k+1}R(x)$$

ce qui est absurde, puisque $x \mapsto (x-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P.

◇ Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(\lambda) \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)^k Q(x)$$

Tout d'abord on peut affirmer que $x \mapsto (x-\lambda)^k$ divise P. Supposons maintenant que $x \mapsto (x-\lambda)^{k+1}$ divise P. Il existe alors un polynôme R tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)^{k+1}R(x)$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\lambda)^k Q(x) = (x-\lambda)^k (x-\lambda) R(x)$$

Par unicité du quotient dans la division euclidienne de P par $x \mapsto (x-\lambda)^k$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x-\lambda) R(x)$$

et alors :

$$Q(\lambda) = 0$$

ce qui est absurde. Finalement, $x \mapsto (x-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P et $x \mapsto (x-\lambda)^k$ divise P, donc λ est racine d'ordre k de P.

□

Exercice 5.13

1. Vérifier que 1 est racine d'ordre de multiplicité 2 de $A : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.
2. Vérifier que 2 est racine de $B : x \mapsto x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ et donner son ordre de multiplicité.
3. Déterminer les racines de $C : x \mapsto x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4$ ainsi que leurs multiplicités respectives.

C.4. Le cas des polynômes de degré 2

Théorème 5.30

Soit (a, b, c) un triplet de réels tel que : $a \neq 0$. On considère le polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c = 0$, de degré 2.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$; le réel Δ est appelé **discriminant** de P.

i. Si $\Delta > 0$, P admet exactement deux racines distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ii. Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine réelle, qui est : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

iii. Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine réelle.

Preuve Comme $a \neq 0$, on écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors :

i. Si $\Delta > 0$, alors :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Finalement, P admet exactement deux racines réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus x_1 et x_2 sont des racines simples.

ii. Si $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

donc P admet $-\dfrac{b}{2a}$ comme unique racine et c'est une racine double.

iii. Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle.

$\square$

Exercice 5.14 Soit a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On suppose que le polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet au moins une racine réelle (donc soit une racine réelle double, soit deux racines réelles distinctes) et on note λ et μ ses racines (avec éventuellement $\lambda = \mu$.

Prouver que :

$$\lambda + \mu = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \lambda\mu = \frac{c}{a}$$

C.5. Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

Proposition 5.31

Tout polynôme P de degré n non nul et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est le produit polynômes de degré 1 ou 2 ; autrement dit, il existe des familles $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$, $(\gamma_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ de réels et un réel c tels que :

$$P = c\left[\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)\right]\left[\prod_{k=1}^{q}(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)\right]$$

avec :

$$\forall k \in [\![1, q]\!]\,,\ \beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$$

Remarque À part dans des situations « simples », il ne sera pas demandé de factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 5-1

1. Comme P est constante nulle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

et en particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times 0^k = 0$$

soit encore :

$$\boxed{a_0 = 0}$$

2. Comme P est constante nulle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^i \sum_{k=i}^{n} a_k x^{k-i} = 0$$

et alors, en divisant par x^i (si $x \neq 0$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \sum_{k=i}^{n} a_k x^{k-i} = 0$$

De plus, la fonction, $x \mapsto \sum_{k=i}^{n} a_k x^{k-i}$ est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc on obtient, en faisant tendre x vers 0 :

$$\sum_{k=i}^{n} a_k \times 0^{k-i} = 0$$

donc $a_i = 0$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Il y a une contradiction}}$$

Correction de l'exercice 5-2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\text{« } (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \text{ »}$$

et on démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

◇ Par convention, on a : $(P+Q)^0 = 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^k Q^{0-k} = \binom{0}{0} P^0 Q^0 = 1$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(P+Q)^{n+1} &= (P+Q)(P+Q)^n \\ &= (P+Q)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{k+1} Q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n+1-k}\end{aligned}$$

soit encore, en effectuant le changement d'indice $k := k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(P+Q)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} P^k Q^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] P^k Q^{n+1-k} + Q^{n+1} - \binom{n}{n+1} P^{n+1}\end{aligned}$$

et alors, d'après la formule du triangle de Pascal et en remarquant que $\binom{n}{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned}(P+Q)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^k Q^{n+1-k} + Q^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^k Q^{n+1-k}\end{aligned}$$

et donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}}$$

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) &= (x+2)^n - (x+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} x^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2^{n-k} - 1\right) x^k\end{aligned}$$

et comme $2^0 - 1 = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(2^{n-k} - 1\right) x^k$$

Finalement, le coefficient du monôme de degré $n-1$ n'étant pas nul, on peut conclure :

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de degré } n-1 \text{ et de coefficient dominant } \binom{n}{n-1} \left(2^{n-(n-1)} - 1\right) = n}$$

Correction de l'exercice 5-3

1. Comme P est un polynôme de degré n, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $a_n \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Si $n \geqslant 1$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = \sum_{i=i}^{n} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\, a_{i+1} x^i$$

donc, comme $na_n \neq 0$, P' est de degré $n-1$ (et de coefficient dominant na_n).
Si $n = 0$, $P' = 0$ donc :

$$\boxed{\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. On en déduit par récurrence (laissée au soin du lecteur) que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P^{(k)}) = \begin{cases} \deg(P) - k & \text{si } \deg(P) \geqslant k \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 5-4

On a directement :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P^{(0)}(x) &= P(x) = 2x^3 - 3x - 1 \\ P^{(1)}(x) &= P'(x) = 6x^2 - 3 \\ P^{(2)}(x) &= (P')'(x) = 12x \\ P^{(3)}(x) &= (P^{(2)})'(x) = 12 \\ P^{(4)}(x) &= (P^{(3)})'(x) = 0\end{aligned}$$

et il en découle par récurrence :

$$\forall k \geqslant 4,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = 0$$

Correction de l'exercice 5-5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\text{« } (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ »}$$

et on démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- ◇ Par convention, on a : $(PQ)^{(0)} = PQ$ et :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} = \binom{0}{0} P^{(0)} Q^{(0)} = PQ$$

  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} (PQ)^{(n+1)} &= \left((PQ)^{(n)}\right)' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + P^{(k)} Q^{(n-k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} \end{aligned}$$

  soit encore, en effectuant le changement d'indice $k := k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} (PQ)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + P^{(0)} Q^{(n+1)} - \binom{n}{n+1} P^{(n+1)} Q^{(0)} \end{aligned}$$

  et alors, d'après la formule du triangle de Pascal et en remarquant que $\binom{n}{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned} (PQ)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + P^{(0)} Q^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

  et donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

- ◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}}$$

Correction de l'exercice 5-6

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- ► Si $n = 0$, on a : $(X^0)' = 0$ et l'on obtient par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (X^0)^{(k)} = 0$$

► On suppose maintenant que n est supérieur ou égal à 1 et on montre par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: $(X^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, X^{n-k}$ est vraie.

◇ Pour $k=0$, on a :

$$(X^n)^{(0)} = X^n = \frac{n!}{n!}\, X^n$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(X^n)^{(k+1)} &= ((X^n)^{(k)})' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\,(X^{n-k})' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\,(n-k)\,X^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k+1))!}\,X^{n-(k+1)}\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$.

◇ On en déduit que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. En particulier on en déduit que $(X^n)^{(n)} = n!$ et alors $(X^n)^{(n+1)} = 0$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ (X^n)^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\,X^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 5-7

1. D'après 5.17, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i\,\frac{i!}{(i-k)!}\,x^{i-k}$$

2. On a donc, en évaluant en 0 :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ P^{(k)}(0) = \sum_{i=k}^{n} a_i\,\frac{i!}{(i-k)!}\,0^{i-k} = a_k\,k! \tag{5.1}$$

d'où :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

et alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,x^k}$$

3. D'après le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,(x-\lambda+\lambda)^k\end{aligned}$$

donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i}(x-\lambda)^i$$

soit encore, en inversant l'ordre de sommation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left[\sum_{k=i}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k-i)!}\, \lambda^{k-i} \right] (x-\lambda)^i$$

Or, d'après (5.1), on a :

$$\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ \sum_{k=i}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k-i)!}\, \lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!}\, \lambda^{k-i}$$

soit encore, d'après le résultat de la première question :

$$\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ \sum_{k=i}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k-i)!}\, \lambda^{k-i} = P^{(i)}(\lambda)$$

et finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\, (x-\lambda)^k}$$

Correction de l'exercice 5-8

► On pose la division :

$$\begin{array}{rrr|l}
x^7 & & -2x^3 & x^2-1 \\ \cline{4-4}
-(x^7 & -x^5) & & x^5+x^3-x \\ \cline{1-2}
 & x^5 & -2x^3 & \\
 & -(x^5 & -x^3) & \\ \cline{2-3}
 & & -x^3 & \\
 & & -(-x^3 \quad +x) & \\ \cline{3-3}
 & & -x &
\end{array}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^7 - 2x^3 = (x^5+x^3-x)\underbrace{(x^2-1)}_{=Q(x)} + (\underbrace{-x}_{=R(x)})$$

ce qui signifie, comme $\deg(R) < \deg(Q)$, que :

> Le quotient de la division euclidienne de $x \mapsto x^7 - 2x^3$ par $x \mapsto x^2-1$ est $x \mapsto x^5+x^3-x$, tandis que le reste est $x \mapsto -x$.

► De même, on prouve que :

> Le quotient de la division euclidienne de $x \mapsto x^5 - 3x^4 + 2$ par $x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$ est $x \mapsto x^2 - 2x - 3$, tandis que le reste est $x \mapsto x - 1$.

► On pourrait procéder de même, mais on rappelle l'identité remarquable :

$$\forall q \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ q^{n+1} - 1 = (q-1) \sum_{k=0}^{n} q^k$$

qui nous permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ x^{10} - 1 &= (x^2)^5 - 1 \\ &= (x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

> Le quotient de la division euclidienne de $x \mapsto x^{10}-1$ par $x \mapsto x^2-1$ est $x \mapsto x^8+x^6+x^4+x^2+1$ et le reste est nul.

Correction de l'exercice 5-9

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Deux cas se présentent alors :

- si $\deg(A) < \deg(B)$, alors, comme $A = 0 \times B + A$, le quotient de la division euclidienne de A par B est nul donc de degré $-\infty$,
- si $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, alors Q n'est pas le polynôme nul (car sinon on aurait $A = R$, ce qui est absurde puisque A et R n'ont pas le même degré) et alors :

  $$\deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) > \deg(R),$$

  et donc :

  $$\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q),$$

  ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\deg(Q) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(A) < \deg(B) \\ \deg(A) - \deg(B) & \text{sinon} \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 5-10

- En effectuant la division euclidienne de $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ par $x \mapsto x^2 - 3x + 2$, on obtient :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

  ce qui nous permet de conclure :

  $$\boxed{x \mapsto x^2 - 3x + 2 \text{ divise } x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

- De même, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + 2x^2 + x - 1 = (x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 2) + (22x - 19),$$

  ce qui nous permet de conclure, puisque le reste n'est pas nul :

  $$\boxed{x \mapsto x^2 - 3x + 2 \text{ ne divise pas } x \mapsto x^4 + 2x^2 + x - 1}$$

Correction de l'exercice 5-11

On peut remarquer que 1 et 2 sont racines de B et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) = (x-1)(x-2)$$

De plus on peut remarquer que $A(1) = 0$ donc $x \mapsto x - 1$ divise A. Il existe donc un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x-1)\,Q(x)$$

Comme $A(2) = 0$, on a alors nécessairement $Q(2) = 0$ donc $x \mapsto x - 2$ divise Q et il existe un polynôme R tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x-2)\,R(x)$$

donc tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x-1)\,(x-2)\,R(x)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{B \text{ divise } A}$$

Correction de l'exercice 5-12

1. Comme B divise A, il existe un polynôme Q tel que : $A = BQ$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$A(\lambda) = B(\lambda)\,Q(\lambda)$$

et donc, si λ est racine de B :

$$A(\lambda) = 0$$

d'où :

$$\boxed{\text{Si } B \text{ divise } A\text{, alors toute racine de } B \text{ est aussi racine de } A}$$

2. Si l'on prend $A = X$ et $B = X^2$, on peut remarquer que toute racine de B est aussi racine de A (puisque 0 est la seule racine de B et que 0 est aussi racine de A), mais que B ne divise pas A (puisque le reste de la division euclidienne de A par B est A, qui n'est pas nul) donc :

$$\boxed{\text{La réciproque n'est pas vraie}}$$

Correction de l'exercice 5-13

1. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ A(x) &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \\ A'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 6x + 8 \\ A''(x) &= 12x^2 - 12x - 6 \end{aligned}$$

et donc :

$$A(1) = A'(1) = 0 \quad \text{et} \quad A''(1) = -6 \neq 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{1 \text{ est racine d'ordre 2 de } A}$$

2. On a :

$$B(2) = 32 - 6 \times 16 + 11 \times 8 - 2 \times 4 - 12 \times 2 + 8 = 0$$

donc 2 est racine de B. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ B'(x) &= 5x^4 - 24x^3 + 33x^2 - 4x - 12 \\ B''(x) &= 20x^3 - 72x^2 + 66x - 4 \\ B^{(3)}(x) &= 60x^2 - 144X + 66 \end{aligned}$$

donc :

$$B'(2) = B''(2) = 0 \quad \text{et} \quad B^{(3)}(2) = 18 \neq 0$$

donc :

$$\boxed{2 \text{ est racine d'ordre 3 de } B}$$

3. On commence par chercher des racines « évidentes » en testant $0, 1$ et -1 et on constate en particulier que : $C(1) = 0$. On cherche alors l'ordre de multiplicité de 1, par exemple en factorisant (cela sera utile pour trouver les autres racines) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x-1)\underbrace{\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 4\right)}_{Q_1(x)}$$

On constate alors que : $Q_1(1) = 0$, donc on factorise de nouveau :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x-1)^2\underbrace{\left(x^2 - 5x + 4\right)}_{Q_2(x)}$$

On constate de nouveau que : $Q_2(1) = 0$, donc on factorise encore une fois :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = (x-1)^3 \underbrace{(x-4)}_{Q_3(x)}$$

Q_3 n'ayant que 3 pour racine et celle-ci étant simple, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{Les racines de } A \text{ sont 1 (ordre 3) et 4 (ordre 1)}}$$

Correction de l'exercice 5-14

1. On a directement :

$$\boxed{P+Q = 2X^3 - 2X + 1 \quad \text{et} \quad PQ = 2X^5 - 5X^4 + 2X^3 + X^2 - 2X}$$

2. ► On a :

$$\boxed{P(X^2) = 2X^6 - X^4 + 1}$$

► On a :

$$\begin{aligned} P(X+1) &= 2\,(X+1)^3 - (X+1)^2 + 1 \\ &= 2\left(X^3 + 3X^2 + 3X + 1\right) - (X^2 + 2X + 1) + 1 \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{P(X+1) = 2X^3 - 5X^2 + 4X + 2}$$

Sommaire