3 Ensembles et applications

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

L'objectif de ce chapitre est de regrouper toutes les notions sur les ensembles dont la maîtrise est essentielle à une bonne compréhension des différentes notions du programme.
Il s'agit en grande partie de définitions, ce qui peut rendre ce chapitre indigeste au premier abord, et il ne faudra donc pas hésiter à y revenir régulièrement tout au long de l'année pour s'assurer que toutes ces définitions sont bien assimilées.

A. Généralités sur les ensembles

Définition 3.1

Un **ensemble** est une collection d'objets discernables, dont les objets sont appelés les **éléments**.

L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$.

Remarques

a. On peut définir un ensemble *en extension*, en notant ses éléments entre accolades. Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers naturels pairs, on peut noter :

$$E = \{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$$

b. On peut aussi définir un ensemble *en compréhension*, en notant, entre accolades toujours, une description de ses éléments. Par exemple, si E désigne l'ensemble des entiers naturels pairs, on peut noter : $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \text{ est pair}\}$ ou encore : $E = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 3.1 Pour tout couple (p, n) d'entiers vérifiant $p \leqslant n$, on note $[\![p, n]\!]$ l'ensemble de tous les entiers compris entre p et n :

$$[\![p, n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \ / \ p \leqslant k \leqslant n\} = \{p, p+1, \dots, n\}$$

Notation 3.2

Soit E un ensemble quelconque.

i. si l'élément x **appartient à** E, on note : $x \in E$,

ii. si l'élément x **n'appartient pas à** E, on note : $x \notin E$.

Définition 3.3

Soit E un ensemble quelconque. On appelle partie de E tout ensemble F dont les éléments appartiennent tous à E.
Si F est une partie de E, on dit que F est **inclus** dans E, ou est une **partie** de E, et on note : $F \subset E$.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemple 3.2 $\mathscr{P}([\![1, 3]\!]) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Remarques

a. Pour tout ensemble E, on a toujours : $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$. $\mathscr{P}(E)$ contient donc au moins deux éléments : E et $\varnothing$.

b. On remarquera que, si E désigne un ensemble, $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble, dont les éléments sont des ensembles. En particulier, si x désigne un élément de E, il conviendra de remarquer que :

$$x \in E, \quad \{x\} \subset E \quad \text{et} \quad \{x\} \in \mathscr{P}(E)$$

Méthode 3.4

Soit E et F deux ensembles quelconques.

i. Pour montrer que E est inclus dans F, on montre que, pour tout élément x de E, x appartient à F.

ii. Pour montrer que E et F sont égaux, on procède souvent par *double inclusion*, en prouvant que E est inclus dans F et que F est inclus dans E.

Proposition 3.5

Si E et F sont deux ensembles, alors :

$$F = E \Longleftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$$

Définition 3.6

Soit E un ensemble quelconque et F une partie de E. On appelle **complémentaire** de F dans E l'ensemble, noté $\complement_E^F$, de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à F :

$$\complement_E^F = \{x \in E \;/\; x \notin F\}$$

Cet ensemble est aussi noté $E \setminus F$, ou plus simplement $\overline{F}$ lorsqu'il n'y a pas de doute quant à l'ensemble E.

Proposition 3.7

Si E est un ensemble et si F est une partie de E, alors :

$$\overline{E} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = E \quad \text{et} \quad \overline{\overline{F}} = F$$

Proposition 3.8

Si E est un ensemble et si F et G sont deux parties de E, alors :

$$F \subset G \Longleftrightarrow \overline{G} \subset \overline{F}$$

Exercice 3.1 Démontrer la proposition 3.8.

B. Opérations sur les ensembles

B.1. Union d'ensembles

Définition 3.9

Si F et G sont deux ensembles, on appelle **réunion** ou **union** de F et de G l'ensemble, noté $F \cup G$, formé en réunissant les éléments qui appartiennent à F et ceux qui appartiennent à G ; autrement dit :

$$F \cup G = \{x \;/\; x \in F \text{ ou } x \in G\}$$

Plus généralement, si I est une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$ et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, la réunion de ces ensembles est l'ensemble $\bigcup_{i\in I} F_i$ formé par les éléments appartenant à au moins l'un des ensembles F_i ; autrement dit :

$$\bigcup_{i\in I} F_i = \{x \ / \ \exists\, i \in I \text{ tq } x \in F_i\}$$

Remarques

a. Un élément x appartient à $F \cup G$ s'il appartient à F ou à G (ou au deux).

b. Plus généralement, un élément x appartient à $\bigcup_{i\in I} F_i$ s'il existe $i \in I$ tel que x appartienne à F_i.

Exemples 3.3

a. Si $F =]-1,2]$ et $G = [0,3]$, alors : $F \cup G =]-1,3]$.

b. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = \left]\dfrac{1}{k}, 2 - \dfrac{1}{k}\right[$, alors : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k =]0,2[$.

Proposition 3.10

Étant donnés trois ensembles F, G et H, on a :

i. $F \cup G = G \cup F$ (la réunion est commutative),

ii. $F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$ (la réunion est associative),

iii. $F \cup \varnothing = \varnothing \cup F = F$ ($\varnothing$ est l'élément neutre de la réunion),

iv. si $F \subset G$, alors : $F \cup G = G$.

B.2. Intersection d'ensembles

Définition 3.11

Si F et G sont deux ensembles, on appelle **intersection** de F et de G l'ensemble, noté $F \cap G$, formé par les éléments qui appartiennent à la fois à F et à G ; autrement dit :

$$F \cap G = \{x \ / \ x \in F \text{ et } x \in G\}$$

Plus généralement, si I est une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$ et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, l'intersection de ces ensembles est l'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ formé par les éléments appartenant à tous les ensembles F_i ; autrement dit :

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \ / \ \forall i \in I,\ x \in F_i\}$$

Remarques

a. Un élément x appartient à $F \cap G$ s'il appartient à F et à G.

b. Plus généralement, un élément x appartient à $\bigcup_{i\in I} F_i$ s'il appartient à F_i pour tout $i \in I$.

Exemples 3.4

a. Si $F =]-1,2]$ et $G = [0,3]$, alors : $F \cap G = [0,2]$.

b. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = \left[-\dfrac{1}{k}, 1 + \dfrac{1}{k}\right]$, alors : $\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = [0,1]$.

Proposition 3.12

Étant donnés trois ensembles F, G et H, on a :

i. $F \cap G = G \cap F$ (l'intersection est commutative),

ii. $F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$ (l'intersection est associative),

iii. $F \cap \varnothing = \varnothing \cap F = \varnothing$,

iv. si $F \subset G$, alors : $F \cap G = F$.

Définition 3.13

On dit que deux ensembles E et F sont **disjoints** s'ils n'ont aucun éléments commun ; autrement dit :

$$E \text{ et } F \text{ sont disjoints} \iff E \cap F = \varnothing$$

Plus généralement, si I est une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$ et si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on dit que les ensembles de la famille $(F_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux disjoints** si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow F_i \cap F_j = \varnothing$$

B.3. Propriétés de l'union et de l'intersection

Proposition 3.14

La réunion est distributive par rapport à l'intersection ; l'intersection est distributive par rapport à la réunion. Autrement dit, étant donnés trois ensembles F, G et H, on a :

i. $(F \cap G) \cup H = (F \cup H) \cap (G \cup H)$,

ii. $(F \cup G) \cap H = (F \cap H) \cup (G \cap H)$.

Preuve

i. On procède par double inclusion.

◇ Soit $x \in (F \cap G) \cup H$. Deux cas sont possibles :

— Soit $x \in F \cap G$. Alors x appartient à F, donc à $F \cup H$. De même, x appartient à G, donc à $G \cup H$. Finalement, x appartient à $F \cup H$ et à $G \cup H$, donc : $x \in (F \cup H) \cap (G \cup H)$.

— Soit x appartient à H, et alors x appartient à $F \cup H$ ainsi qu'à $G \cup H$, donc : $x \in (F \cup H) \cap (G \cup H)$. De ces deux cas, on peut déduire :

$$(F \cap G) \cup H \subset (F \cup H) \cap (G \cup H)$$

◇ Soit $x \in (F \cup H) \cap (G \cup H)$. x appartient donc à $F \cup H$ et à $G \cup H$. Deux cas sont possibles :

— Soit $x \in H$, et alors x appartient à $(F \cap G) \cup H$.

— Soit $x \notin H$, et alors x appartient à F et à G, donc à $F \cap G$, et donc à $(F \cap G) \cup H$. De ces deux cas, on peut déduire :

$$(F \cup H) \cap (G \cup H) \subset (F \cap G) \cup H$$

Finalement, par double inclusion on a l'égalité attendue.

□

Exercice 3.2 Démontrer le point *ii* de la proposition (3.14).

Théorème 3.15 ▶ Lois de Morgan

Étant donnés deux parties F et G d'un même ensemble E, on a :

$$\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G} \quad \text{et} \quad \overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$$

Plus généralement, si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de parties d'un même ensemble E, on a :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} F_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{F_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{F_i}$$

Preuve

◇ Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \overline{F \cup G} &= \{x \in E \ / \ x \notin (F \cup G)\} \\ &= \{x \in E \ / \ x \notin F \text{ et } x \notin G\} \\ &= \left\{x \in E \ / \ x \in \overline{F} \text{ et } x \in \overline{G}\right\} \\ &= \overline{F} \cap \overline{G} \end{aligned}$$

◇ De même, on a :

$$\begin{aligned} \overline{F \cap G} &= \{x \in E \ / \ x \notin (F \cap G)\} \\ &= \{x \in E \ / \ x \notin F \text{ ou } x \notin G\} \\ &= \left\{x \in E \ / \ x \in \overline{F} \text{ ou } x \in \overline{G}\right\} \\ &= \overline{F} \cup \overline{G} \end{aligned}$$

◇ Les généralisations se démontrent de manière analogue.

□

B.4. Produit cartésien d'ensembles

Définition 3.16

i. Si F et G sont deux ensembles, on appelle **produit cartésien** de F et de G l'ensemble, noté $F \times G$, formé par les couples (x, y) où x est un élément de F et y est un élément de G :

$$F \times G = \{(x, y) \ / \ x \in F \text{ et } y \in G\}$$

Si $F = G$, on note plus simplement : $F^2 = F \times F$.

ii. Si F et G sont deux ensembles, on appelle **produit cartésien** de F et de G l'ensemble, noté $F \times G$, formé par les couples (x, y) où x est un élément de F et y est un élément de G :

$$F \times G = \{(x, y) \ / \ x \in F \text{ et } y \in G\}$$

Si $F = G$, on note plus simplement : $F^2 = F \times F$.

iii. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont n ensembles (n désignant un entier supérieur ou égal à 2), on note $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!] \,, \ x_i \in F_i\}$$

Si $F_1 = F_2 = \cdots = F_n$, on note plus simplement : $F_1 \times \cdots \times F_n = F^n$.

Remarque Attention, la notion d'ordre dans le couple (x, y) de $F \times G$ est importante, et les ensembles $F \times G$ et $G \times F$ ne sont *a priori* pas égaux. Par exemple, si F est l'ensemble des entiers naturels pairs et G est l'ensemble des entiers naturels impairs, le couple $(2, 1)$ appartient à $F \times G$, mais pas à $G \times F$.

Exemple 3.5 Si n est un entier naturel non nul, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets de réels. En particulier, $\mathbb{R}^2$, qui est l'ensemble des couples de réels, peut être assimilé au plan (lorsqu'il est muni d'un repère).

Définition 3.17

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont n ensembles ($n \in \mathbb{N}^*$), alors, pour tout $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartenant à $F_1 \times \cdots \times F_n$, on dit que $x = y$ lorsque $x_i = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Définition 3.18

Si n est un entier naturel non nul, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les opérations suivantes :

i. l'addition : pour tout $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note $x + y$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$x + y = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (x_i + y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

ii. la multiplication par un réel : pour tout $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel α, on note $\alpha \cdot x$ ou plus simplement αx l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\alpha x = (\alpha x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Proposition 3.19

[breakable] Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, on a :

1. $x + y = y + x$ (l'addition est commutative),
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (l'addition est associative),
3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (la mutliplication par un réel est distributive par rapport à l'addition).

Remarque Ces résultats découlent immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

Exercice 3.3

1. On considère les ensembles $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 1, 4\}$.
   Préciser les ensembles $A \cup B, A \cap B$ et $A \times B$.
2. On considère les ensembles $C = [0, 6]$ et $D = [-1, 2]$.
   Préciser les ensembles $C \cup D, C \cap D$ et $C \times D$.
3. Déterminer le complémentaire dans $E = \mathbb{R}$ des ensembles $F = [0, +\infty[\,, G = [0, 1]$ et $H =]-\infty, -1[\cup [2, 3]$.

C. Partition d'un ensemble

Définition 3.20

Soit E un ensemble non vide. On appelle **partition** de E tout ensemble $\{E_i,\ i \in I\}$ (où I est une partie de $\mathbb{N}$) formé de parties de E, non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E, autrement dit telle que :

i. $\forall i \in I,\ E_i \neq \varnothing$,

ii. $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$,

iii. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i = E$.

Exemple 3.6 Si $E = \mathbb{N}$, si E_1 est l'ensemble des entiers naturels impairs et E_2 l'ensemble des entiers naturels pairs, (E_1, E_2) est une partition de E.

D. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Les résultats de ce paragraphe sont admis.

Notation 3.21

On adopte les notations suivantes :

i. $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels,

ii. $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des réels non nuls,

iii. $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls,

iv. $\mathbb{R}^*_+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs,

v. $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels négatifs ou nuls,

vi. $\mathbb{R}^*_-$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs.

Définition 3.22

Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. On dit que P est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall x \in P,\ x \leqslant M$. Un tel réel M (non unique) est alors appelé **majorant** de P.

ii. On dit que M est le **maximum** de P si M est un majorant de P et si M appartient à P.

iii. On dit que P est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall x \in P,\ x \geqslant m$. Un tel réel m (non unique) est alors appelé **minorant** de P.

iv. On dit que m est le **minimum** de P si m est un minorant de P et si m appartient à P.

Théorème 3.23

Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. Si P est majorée, alors elle admet un plus petit majorant M, unique. Ce réel est noté $\sup P$ et est appelé borne supérieure de P.

ii. Si P est minorée, alors elle admet un plus grand minorant m, unique. Ce réel est noté $\inf P$ et est appelé borne inférieure de P.

Remarques

a. Ce résultat est admis.

b. Attention à ne pas confondre borne supérieure et maximum (ou borne inférieure et minimum) d'une partie P de $\mathbb{R}$.

Par exemple, si $P =]0, 1[$, P a une borne supérieure (égale à 1) et une borne inférieure (égale à 0), mais n'a ni maximum, ni minimum.

c. En revanche, on peut remarquer que, lorsque P est une partie de $\mathbb{R}$ admettant un maximum M (respectivement un minimum m), alors M (resp. m) est aussi la borne supérieure (resp. inférieure) de P.

Théorème 3.24

Tout partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (*i.e.* un minimum).
Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément (*i.e.* un maximum).

E. Fonctions, applications

Dans toute la suite de ce chapitre, E et F désignent deux ensembles quelconques.

E.1. Fonctions

Définition 3.25

On dit que f est une **fonction** de E dans F si f est une relation associant à tout élément x de E au plus un élément y de F. Dans ce cas :

i. l'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de f,

ii. l'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivée** de f,

iii. si $y \in F$, si $x \in E$ et si f associe y à x, y est appelé **image** de x par f et on note $y = f(x)$,

iv. si $y \in F$ et $x \in E$ sont tels que $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y par f,

v. la partie de E formée des éléments ayant une image par f est appelée **ensemble de définition** de f, notée D_f,

vi. l'ensemble $\{f(x), x \in F_f\}$ est appelée **ensemble image** de f, noté $f(E)$ ou parfois $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 3.7 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ qui a un réel x associe sa racine carrée est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^+$. 4 est l'image de 2 par f ; -3 et 3 sont les antécédents de 9 par f.

Remarques

a. Attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction f de E dans F : un élément de F n'a pas nécessairement d'antécédent par f dans E. En revanche, on a toujours l'inclusion : $f(E) \subset F$.

b. De même, il est important de faire la distinction entre l'ensemble de départ E de la fonction f et l'ensemble de définition D_f. Un élément de E n'a pas nécessairement d'image par f.

E.2. Applications

Définition 3.26

On dit que f est une **application** de E dans F si f est une relation associant à tout élément x de E un unique élément y de F.
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

Exemple 3.8 $x \mapsto \sqrt{x}$ est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque Ainsi, une application de E dans F est une fonction de E dans F dont l'ensemble de définition est égal à E.

Définition 3.27

Si f est une application de E dans F, l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in E\}$ est appelé **graphe** de f.

Définition 3.28

On appelle application identité de E dans E l'application notée Id_E définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$$

E.3. Opérations sur les applications

Définition 3.29

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$.

i. On appelle somme de f et g l'application notée $f+g$, de D dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ii. On appelle produit de f par le réel a l'application notée $a\,f$, de D dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in D,\ (a\,f)(x) = a\,f(x)$$

iii. On appelle produit de f et g l'application notée $f \times g$ ou plus simplement fg, de D dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in D,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

iv. Si g ne s'annule pas sur D, on appelle quotient de f par g l'application notée $\dfrac{f}{g}$, de D dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in D,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Définition 3.30

Soit G un ensemble. Si f est une application de E dans F et si g est une application de F dans G, on appelle **composée** de f par g, l'application notée $g \circ f$ (lire g « rond » f) de E dans G définie par :

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Exemple 3.9 Si f est l'application $x \mapsto x^2+1$, de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ et g est l'application $x \mapsto \sqrt{x}$, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors $g \circ f$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Remarque Attention, en général, $g \circ f$ n'est pas égale à $f \circ g$. Il est d'ailleurs possibles que l'une des deux existe et pas l'autre.

Exemples 3.10

a. Si f est l'application $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et si g est l'application $x \mapsto x+1$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = x^2+1 \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = (x+1)^2$$

On constate dans cet exemple que : $g \circ f \neq f \circ g$.

b. Si f est l'application $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et si g est l'application $x \mapsto \sqrt{x}$, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors $g \circ f$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

alors que $f \circ g$ est l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Proposition 3.31

Si f est une application de E dans F, si g est une application de F dans G et si h est une application de G dans H, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Définition 3.32

Soit G une partie de E. Si f est une application de E dans F, on appelle **restriction** de f à G l'application notée $f_{|G}$ de G dans F définie par :

$$\forall x \in G,\ f_{|G}(x) = f(x)$$

Définition 3.33

Si f est une application de E dans F et si G et H sont deux ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset H$, on appelle **prolongement** de f à G toute application g de G dans H telle que : $g_{|E} = f$.

Exemple 3.11 L'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ est un prolongement de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

E.4. Image directe, image réciproque

Définition 3.34

Si f est une application de E dans F et si A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f, l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Exemple 3.12 Si f est l'application $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f([1, 4[) = \{1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad f(]-2, \pi]) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Définition 3.35

Si f est une application de E dans F et si B est une partie de F, on appelle **image réciproque** de B par f, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$

Exemple 3.13 Si f est l'application $x \mapsto |x|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{-2, -1, 1, 2\}, \quad f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\quad \text{et} \quad f^{-1}([-2, -1]) = \varnothing$$

Définition 3.36

Si f est une application de E dans F et si A est une partie de E, on dit que A est **stable** par f si : $f(A) \subset A$.

F. Injectivité, surjectivité, bijectivité

F.1. Injectivité

Définition 3.37

Si f est une application de E dans F, on dit que f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une injection de E dans F.

Remarques

a. Il est essentiel de connaître parfaitement cette définition, sans chercher à modifier les termes ni en oublier. Il en sera de même pour les définitions suivantes.

b. On peut remarquer que, par contraposée, une application f de E dans F est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Exemples 3.14

a. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est injective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

b. La fonction valeur absolue n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque $|-2| = |2|$ et $-2 \neq 2$.

F.2. Surjectivité

Définition 3.38

Si f est une application de E dans F, on dit que f est **surjective** de E sur F si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ /\ y = f(x)$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une surjection de E dans F.

Remarque On peut remarquer que, si f est une application de E dans F, il est équivalent de dire que f est surjective de E sur F et que $f(E) = F$.

Exemples 3.15

a. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est surjective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

b. La fonction valeur absolue est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (-3, par exemple, n'a pas d'antécédent par cette fonction).

c. La fonction partie entière n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (π, par exemple, n'a pas d'antécédent par cette fonction), mais elle est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$.

Remarque Comme en témoigne l'exemple précédent, il est essentiel de ne pas oublier de mentionner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée pour indiquer qu'une application est surjective : changer l'ensemble d'arrivée, notamment, peut changer le caractère surjectif.

F.3. Bijectivité

Définition 3.39

Si f est une application de E dans F, on dit que f est **bijective** de E sur F si tout élément de F admet exactement un antécédent par f, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E \ /\ y = f(x)$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une bijection de E dans F.

Remarque Une application est donc bijective de E sur F si elle est à la fois injective et surjective de E sur F.

Définition 3.40

Si f est une application bijective de E dans F, on appelle **réciproque** de f l'application de F dans E, notée f^{-1} définie par :

$$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Exemple 3.16 $x \mapsto x^2$ est une application bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, et sa réciproque est l'application $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 3.4 Démontrer que l'application $f : x \mapsto x - x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^-$ et préciser sa réciproque.

Remarques

a. En pratique, prouver qu'une application f est bijective de E dans F, on cherche à résoudre, pour tout $y \in F$ fixé, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x. La bijectivité sera démontrée lorsque, pour tout $y \in F$, on aura prouvé l'existence et l'unicité de la solution x et cette solution sera alors $f^{-1}(y)$.

b. On déduit de ces définitions la proposition suivante :

Proposition 3.41

Si f est une application bijective de E dans F, alors $f \circ f^{-1}$ est l'application identité sur F et $f^{-1} \circ f$ est l'application identité sur E.

Théorème 3.42

Si f est une application de E dans F, f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Si une telle application g existe, on a alors : $f^{-1} = g$.

Exercice 3.5 D'après 3.41 (qui est une conséquence immédiate de la définition), si f est une application bijective de E sur F, alors $g = f^{-1}$ est une application de F dans E telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On se propose maintenant de démontrer la réciproque. On suppose donc qu'il existe une application g de F dans E telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. En utilisant l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, démontrer que f est surjective de E sur F.
2. En utilisant l'égalité $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, démontrer que f est injective sur E.
3. Montrer alors que f est bijective de E sur F et que sa réciproque est g.

Remarque Les deux résultats suivants sont des conséquences immédiates de cette proposition.

Théorème 3.43

Si f est une bijection de E dans F, alors f^{-1} est une bijection de F dans E et :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Théorème 3.44

Si f est une bijection de E dans F et si g est une bijection de F dans G, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

G. Corrections des exercices

Correction de l'exercice 3-1

On suppose que : $F \subset G$. Soit x un élément quelconque de $\overline{G}$. Comme x n'appartient pas à G et comme tout élément de F appartient aussi à G, x n'appartient pas à F, donc : $x \in \overline{F}$. Ainsi :

$$F \subset G \Longrightarrow \overline{G} \subset \overline{F}$$

En substituant $\overline{G}$ à F et $\overline{F}$ à G, on en déduit :

$$\overline{G} \subset \overline{F} \Longrightarrow \overline{\overline{F}} \subset \overline{\overline{G}}$$

donc, avec 3.7 que la réciproque est également vraie.

Correction de l'exercice 3-2

2. On procède par double inclusion.
   - ⋄ Soit $x \in (F \cup G) \cap H$. Alors x appartient à $F \cup G$ et à H. Deux cas sont possibles :
     — Soit $x \in F$, et alors x appartient à $(F \cap H)$, donc à $(F \cap H) \cup (G \cap H)$.
     — Soit $x \in G$, et alors x appartient à $(G \cap H)$, donc à $(F \cap H) \cup (G \cap H)$. De ces deux cas, on peut déduire :
     $$(F \cup G) \cap H \subset (F \cap H) \cup (G \cap H)$$
   - ⋄ Soit $x \in (F \cap H) \cup (G \cap H)$. x appartient donc à $F \cap H$ ou à $G \cap H$. Deux cas sont possibles :
     — Soit $x \in (F \cap H)$, et alors x appartient à F, donc à $F \cup G$, ainsi qu'à H, donc x appartient à $(F \cup G) \cap H$.
     — Soit $x \notin (G \cap G)$, et alors x appartient à G, donc à $F \cup G$, ainsi qu'à H, donc x appartient à $(F \cup G) \cap H$. De ces deux cas, on peut déduire :
     $$(F \cap H) \cup (G \cap H) \subset (F \cup G) \cap H$$

   Finalement, par double inclusion on a l'égalité attendue.

Correction de l'exercice 3-3

1. On a immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6\}, \ A \cap B = \{1\}, \\ A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 4), (4, 0), (4, 1), (4, 4), (6, 0), (6, 1), (6, 4)\} \end{array}}$$

2. On a immédiatement :

$$\boxed{C \cup D = [-1, 6]\,,\ C \cap D = [0, 2]\,,\ C \times D = \{(x, y)\ /\ x \in [0, 6]\ \text{ et } y \in [-1, 2]\}}$$

3. On a directement :

$$\boxed{\overline{F} =]-\infty, 0[\,,\ \overline{G} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\,,\ \overline{H} = [-1, 2[\cup]3, +\infty[}$$

Correction de l'exercice 3-4

Soit $y = \mathbb{R}^-$. On peut remarquer que, pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a :

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 - x + y = 0$$

Or on sait que l'équation $x^2 - x + y = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4y$. Comme y est négatif ou nul, Δ est strictement positif et l'équation $x^2 - x + y = 0$ admet deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}$$

De plus, on a, comme y est négatif ou nul :

$$1 - 4y \geqslant 1$$

et comme la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{1-4y} \geqslant 1$$

d'où :

$$x_1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0$$

ce qui prouve finalement que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x appartenant à $\mathbb{R}^-$, qui est $\dfrac{1 - \sqrt{1-4y}}{2}$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R}^- \text{ sur } \mathbb{R}^- \text{ et on a : } \forall y \in \mathbb{R}^-,\ f^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2}}$$

Correction de l'exercice 3-5

1. Comme $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in F,\ y &= (f \circ g)(y) \\ &= f(g(y)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

   donc, comme $g(y)$ appartient à E pour tout $y \in F$:

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ f(x) = y$$

   d'où :

$$\boxed{f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F}$$

2. Soit $(x, x') \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\Longrightarrow x = x', \end{aligned}$$

   et donc, comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$:

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

   donc :

$$\boxed{f \text{ est aussi injective sur } E}$$

3. On a donc prouvé que f est surjective et injective de E sur F et l'on peut conclure en utilisant (3.1) :

$$\boxed{f \text{ est bijective de } E \text{ sur } F \text{ et } g = f^{-1}}$$

Sommaire