1 Éléments de logique et méthodes de raisonnement

ECG Maths Approfondies
Semestre 1

L'objet de ce chapitre introductif n'est pas de faire un cours sur la logique, mais bien d'introduire les éléments fondamentaux dont la maîtrise est essentielle à la construction d'un raisonnement mathématique solide. Pour ces raisons, les théorèmes énoncés ici seront admis. Rappelons par ailleurs qu'il ne peut y avoir d'échange sans précision dans le langage et que le changement des mots d'une phrase peut en affecter le sens profondément.

A. Éléments de logique

A.1. Proposition

Définition 1.1

On appelle proposition toute affirmation concernant un ensemble d'objets mathématiques dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse.

Exemples 1.1

a. « si $x = 1$, alors $x^2 = 1$ » est une proposition vraie.

b. « si $x^2 = 1$, alors $x = 1$ » est une proposition fausse (pour bien démarrer, on rappelle aux plus distraits que $(-1)^2 = 1$ et que $-1 \neq 1$...).

c. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, pour tout entier naturel n, « $u_n \leqslant u_{n+1}$ » est une proposition, qui peut être vraie ou fausse selon la suite et selon la valeur de n. « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » est une proposition, dont la véracité ne dépend pas de la valeur de n.

Remarques

a. Lorsque deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies, on dit que la proposition « $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ » notée $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$, est vraie.

b. Lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est vraie, on dit que la proposition « $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ » notée $\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}$, est vraie.

Définition 1.2

Lorsqu'une proposition $\mathscr{P}$ est fausse, on dit que la **proposition contraire**, notée $\overline{\mathscr{P}}$ (lire « non $\mathscr{P}$ ») est vraie. La proposition $\overline{\mathscr{P}}$ est appelée proposition contraire, ou négation, de $\mathscr{P}$.

Remarques

a. La négation de $\overline{\mathscr{P}}$ est $\mathscr{P}$.

b. La négation de « les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies » est « l'une au moins des propositions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ n'est pas vraie ». Autrement dit, la proposition $\overline{\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}}$ est identique à la proposition $\overline{\mathscr{P}} \cup \overline{\mathscr{Q}}$.

c. La négation de « l'une au moins des propositions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie » est « les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux fausses ». Autrement dit, la proposition $\overline{\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}}$ est identique à la proposition $\overline{\mathscr{P}} \cap \overline{\mathscr{Q}}$.

Définition 1.3

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux propositions, on dit que :

i. $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$ si, lorsque la proposition $\mathscr{P}$ est vraie, alors $\mathscr{Q}$ l'est aussi ; dans ce cas, on note : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$,

ii. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes si $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q}$ implique $\mathscr{P}$; dans ce cas, on note : $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ ou $\mathscr{Q} \Longleftrightarrow \mathscr{P}$.

Exemples 1.2

a. $(x = 1) \Longrightarrow (x^2 = 1)$,

b. $(x^2 = 1) \Longleftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$,

c. « n est un entier naturel divisible par 4 » $\Longrightarrow$ « n est un entier natuel divisible par 2 ».

d. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors : « f' est positive sur I » $\Longrightarrow$ « f est croissante sur I ».

Remarques

a. Lorsque $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, on dit que $\mathscr{P}$ est une **condition suffisante** pour $\mathscr{Q}$ et que $\mathscr{Q}$ est une **condition nécessaire** pour $\mathscr{P}$.

b. Lorsque $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, on dit que $\mathscr{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour $\mathscr{Q}$.

c. Pour éviter certaines erreurs de raisonnements, il est essentiel de bien comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante. Par exemple, pour que n soit un entier naturel pair, *il suffit* (condition suffisante) que n soit un entier naturel divisible par 4. On peut aussi dire que *si* (condition suffisante) n est un entier divisable par 4, *alors* c'est un entier pair. En revanche, on dira que, pour que n soit un entier divisible par 4, il *faut* (condition nécessaire) que n soit un entier pair, ou que n est un entier divisible par 4 *seulement si* n est un entier pair.

d. De même, l'équivalence de deux propositions signifie qu'elles sont à la fois nécessaires et suffisantes l'une envers l'autre. Par exemple, si x désigne un réel, on peut dire que, $x^2 = 1$ *si et seulement si* (équivalence) $x = 1$ ou $x = -1$, ou alors, pour que $x^2 = 1$, *il faut et il suffit* (équivalence) que $x = 1$ ou $x = -1$.

e. Les implications $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ sont dites **réciproques** l'une de l'autre (et ne sont pas nécessairement toutes deux vraies en même temps).

Méthode 1.4

Pour démontrer une équivalence $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, il arrive que l'on puisse raisonner par équivalence, en déduisant de $\mathscr{P}$ une suite de proposition équivalentes amenant à $\mathscr{Q}$.
Il est cependant fréquent que l'on ne puisse garder l'équivalence tout au long du raisonnement. Dans ce cas, on peut **raisonner par double implication**, en démontrer d'une part que $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$ et d'autre part que $\mathscr{Q}$ implique $\mathscr{P}$.

Exercice 1.1 Soient a, b et c trois réels. Montrer que les propositions $\mathscr{P}$: « L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles non nulles de signes contraires » et $\mathscr{Q}$: « $ac < 0$ » sont équivalentes.

Remarque Le raisonnement par équivalence directe fonctionne le plus souvent pour résoudre des équations ou des inéquations. Dans les autres cas, on préfèrera le plus souvent raisonner par double implication et on évitera donc d'utiliser le symbole $\Longleftrightarrow$ à tort et à travers, souvent générateur d'erreurs de logique ou de raisonnement.

A.2. Quantificateurs

Notation 1.5

i. **quantificateur existentiel** : le symbole $\exists$, placé devant la variable x, indique l'existence d'un certain x tel que ce qui suit soit vrai : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$ signifie qu'il existe un réel x tel que l'égalité $x^2 = 1$ soit vraie, *ii.* **quantificateur existentiel et d'unicité** : le symbole $\exists!$, placé devant la variable x, indique l'existence d'un unique x tel que ce qui suit soit vrai : $\exists!\, x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x^2 = 1$ signifie qu'il existe un unique réel x positif ou nul tel que l'égalité $x^2 = 1$ soit vraie,

iii. **quantificateur universel** : le symbole $\forall$, placé devant une variable x, indique que ce qui suit est vrai quel que soit x : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x(x^2+1) \geqslant 0$ signifie que, quel que soit le réel x positif ou nul, l'inégalité $x(x^2+1) \geqslant 0$ est vraie.

Remarques

a. Attention, dans une proposition mathématique, l'ordre des quantificateurs est important, et changer l'ordre entre deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$ peut changer le sens de la phrase. Par exemple, la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$ » (quel que soit le réel x positif ou nul, il existe un réel y tel que $y^2 = x$) est vraie, tandis que la proposition « $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ y^2 = x$ » (il existe un réel y tel que, pour tout réel x positif ou nul, $y^2 = x$) est fausse.

b. En général, pour éviter les mots « tel que » on utilise la notation « / » : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ /\ y^2 = x$.

c. La négation de la proposition « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathscr{P}(x)$ est vraie » (en langage mathématique : $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$) est « il existe au moins un x appartenant à E tel que $\mathscr{P}(x)$ ne soit pas vraie » (en langage mathématique : $\exists\, x \in E\ /\ \overline{\mathscr{P}(x)}$).

d. La négation de la proposition « il existe x appartenant à l'ensemble E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie » (en langage mathématique : $\exists\, x \in E,\ \mathscr{P}(x)$) est « quel que soit x appartenant à E, $\mathscr{P}(x)$ n'est pas vraie » (en langage mathématique : $\forall x \in E,\ \overline{\mathscr{P}(x)}$).

e. La négation de la proposition « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, il existe y appartenant à l'ensemble F tel que $\mathscr{P}(x,y)$ soit vraie » ($\forall x \in E,\ \exists\, y \in F,\ \mathscr{P}(x,y)$) est « il existe x appartenant à E tel que, quel que soit y appartenant à F, $\mathscr{P}(x,y)$ est fausse » ($\exists\, x \in E\ /\ \forall y \in F,\ \overline{\mathscr{P}(x,y)}$).

B. Méthodes de raisonnement

B.1. Raisonnement par disjonction de cas

Définition 1.6

Pour démontrer proposition $\mathscr{P}$, il peut arriver que l'on ait besoin de distinguer plusieurs cas. Dans cette situation, on dit qu'**on raisonne par disjonction de cas**.

Exercice 1.2 Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n(n+1)$ est pair.

B.2. Raisonnement par contraposée

Définition 1.7

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux propositions, l'implication $\overline{\mathscr{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{P}}$ est appelée **contraposée** de l'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.

Théorème 1.8

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux propositions, les implications $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\overline{\mathscr{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{P}}$ sont équivalentes.

Méthode 1.9

Pour démontrer une implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, on peut démontrer l'implication $\overline{\mathscr{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathscr{P}}$; dans ce cas, on dit qu'**on raisonne par contraposée**.

Exercice 1.3 Soit n un entier naturel. Démontrer que, si n^2 est impair, alors n est impair.

B.3. Raisonnement par l'absurde

Théorème 1.10

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux propositions, les propositions $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et « $\mathscr{P} \cap \overline{\mathscr{Q}}$ est fausse » sont équivalentes.

Méthode 1.11

Pour démontrer une implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, on peut supposer que $\mathscr{P}$ et $\overline{\mathscr{Q}}$ sont vraies et montrer qu'il y a une contradiction ; dans ce cas, on dit qu'**on raisonne par l'absurde**.

Exercice 1.4 Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

B.4. Raisonnement par récurrence

Théorème 1.12 ► Principe de récurrence

On considère, pour tout entier naturel n, une proposition $\mathscr{P}(n)$. Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Remarques

a. Dans un raisonnement par récurrence pour démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la vérification de $\mathscr{P}(0)$ s'appelle **l'initialisation** et la vérification de l'implication $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ s'appelle **l'hérédité**.

b. Dans un raisonnement par récurrence, il est essentiel de soigner toutes les étapes, y compris l'initialisation, car une suite de propositions peut être héréditaire bien que les propositions soient toutes fausses.

c. Quand on cherche à prouver qu'une proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est souvent tentant de chercher à raisonner par récurrence (et c'est d'ailleurs souvent ce qu'il faut faire !). Cependant, avant de se lancer dans une telle démarche, il conviendra *a priori* de vérifier qu'on dispose d'une relation permettant de passer d'un rang n au rang $n+1$, condition *sine qua non* pour pouvoir démontrer l'hérédité.

Exercice 1.5 Soit x un réel supérieur ou égal à -1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Théorème 1.13 ► Principe de récurrence multiple

On considère, pour tout entier naturel n, une proposition $\mathscr{P}(n)$. Si $\mathscr{P}(0), \dots, \mathscr{P}(k-1)$ sont vraies (k étant un entier naturel non nul fixé) et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \cap \mathscr{P}(n+1) \cap \cdots \cap \mathscr{P}(n+k-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+k)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 1.6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = -2$, $u_1 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n-2$$

Théorème 1.14 ▶ Principe de récurrence forte

On considère, pour tout entier naturel n, une proposition $\mathscr{P}(n)$. Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(0) \cap \mathscr{P}(1) \cap \cdots \cap \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Exercice 1.7 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$, et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$$

Remarque Lorsqu'on envisage un raisonnement par récurrence pour démontrer une suite de propositions $(\mathscr{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$, une question se pose en général : *quel type de récurrence utiliser ? simple, multiple, forte ?* En réalité, la réponse à cette question est en général assez simple à apporter : tout dépend de ce dont on a besoin pour démontrer $\mathscr{P}(n)$. S'il suffit de savoir que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie, on choisira une récurrence simple (*cf.* exercice 21-5). Si plusieurs rangs consécutifs sont nécessaires, on choisira une récurrence multiple (*cf.* exercice 21-6). Si on a besoin de tous les rangs précédents, on choisira une récurrence forte (*cf.* exercice 21-7).

B.5. Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 1.15

Lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un objet mathématique ayant certaines propriétés $\mathscr{P}$, on peut avoir besoin d'en trouver la forme. Pour cela, on peut commencer par supposer l'existence d'un tel objet, pour en trouver des formes possibles $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n, \ldots$ (analyse) puis on teste les différentes formes possibles afin d'en trouver une qui a les propriétés $\mathscr{P}$ (synthèse) : un tel raisonnement est appelé **raisonnement par analyse-synthèse**.

Exercice 1.8 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Indication : on pourra s'intéresser à la valeur de $f(0)$.

C. Correction des exercices

Correction de l'exercice 1-1

On raisonne par double implication.

- On commence par prouver : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$. Pour cela, on suppose que $\mathscr{P}$ est vraie. Comme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, on sait que a n'est pas nul et que :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Comme ces solutions sont de signes contraires, on a donc :

$$\frac{c}{a} < 0$$

Il en découle que a et c sont de signes contraires, donc que : $ac < 0$. Ainsi, on a prouvé :

$$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$$

- ◇ On montre maintenant l'implication réciproque $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$. Pour cela, on suppose que $\mathscr{Q}$ est vraie. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est alors strictement positif et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes, x_1 et x_2, qui vérifient :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

De plus, comme $ac < 0$, a et c sont de signes contraires, donc :

$$x_1 x_2 < 0$$

donc x_1 et x_2 sont de signes contraires, et finalement, on a prouvé :

$$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$$

Correction de l'exercice 1-2

On distingue les cas selon la parité de n.

- ◇ Si n est pair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$ et alors $n(n+1) = 2p(2p+1)$ est divisible par 2.
- ◇ Si n est impair, il existe un entier naturel p tel que $n = 2p+1$ et alors $n(n+1) = (2p+1)(2p+2)$, soit encore $n(n+1) = 2(2p+1)(p+1)$ est divisible par 2.

Dans tous les cas, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ n(n+1) \text{ est pair}}$$

Correction de l'exercice 1-3

On raisonne par contraposée. Pour cela, on démontre que, si n est pair, alors n^2 est pair.
Supposons donc que n soit pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que : $n = 2p$. On a alors

$$n^2 = 4p^2 = 2\left(2p^2\right)$$

donc n^2 est pair. Par conséquent, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } n^2 \text{ est impair, } n \text{ est nécessairement impair}}$$

Correction de l'exercice 1-4

On raisonne par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un nombre rationnel x et un nombre irrationnel y tels que $x + y$ soit rationnel. Comme x et $x + y$ sont rationnels, il existe quatre entiers a, b, c, d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$ et :

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad x + y = \frac{c}{d}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y &= (x+y) - x \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{cb - ad}{bd} \end{aligned}$$

Comme $cb - ad$ et bd sont des entiers, on en déduit que y est rationnel, ce qui est absurde. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel}}$$

Correction de l'exercice 1-5

On peut déjà remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^{n+1} = (1+x) \times (1+x)^n$$

On dispose donc d'une relation liant le rang n et le rang $n+1$, ce qui nous conduit à raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ ».

- *Initialisation.* Par convention, $(1+x)^0 = 1$ donc, comme $1 + 0 \times x = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On démontre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$$

  Pour cela, on remarque que $1 + x \geqslant 0$, ce qui nous permet d'écrire, grâce à l'hypothèse de récurrence :

  $$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geqslant (1+x)(1+nx)\\ &\geqslant 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geqslant 0}\\ &\geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

  Ainsi, on a prouvé : $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
- Grâce au principe de récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx}$$

Correction de l'exercice 1-6

On dispose d'une relation liant les rangs n et $n+1$ et le rang $n+2$, ce qui nous conduit à raisonner par récurrence sur deux rangs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = 3n - 2$ ».

- *Initialisation.* On remarque que :

  $$u_0 = -2 = 3 \times 0 - 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 = 3 \times 1 - 2$$

  donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- *Hérédité.* Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. On démontre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie, c'est-à-dire que :

  $$u_{n+2} = 3(n+2) - 2 = 3n + 4$$

  Par définition de u_{n+2}, on a :

  $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

  et donc, grâce à l'hypothèse de récurrence :

  $$u_{n+2} = 2 \times (3(n+1) - 2) - (3n-2) = 2(3n+1) - 3n + 2 = 3n + 4$$

  Ainsi, on a prouvé : $\mathscr{P}(n) \cap \mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$.
- Grâce au principe de récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n-2}$$

Correction de l'exercice 1-7

On dispose d'une relation liant le rang $n+1$ à tous les rangs précédents, ce qui nous conduit à raisonner par récurrence forte. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = 2^{n-1}$ ».

- *Initialisation.* On remarque que :

  $$u_1 = u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

  donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

◇ *Hérédité*. Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies. On démontre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_{n+1} = 2^n$$

Par définition de u_{n+1}, on a :

$$u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et donc, grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$

et alors, en reconnaissant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $2 \neq 1$ et de premier terme 1 :

$$u_{n+1} = 1 + 1 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n$$

Ainsi, on a prouvé : $\mathscr{P}(0) \cap \cdots \cap \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

◇ Grâce au principe de récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}}$$

Correction de l'exercice 1-8

On procède par analyse-synthèse.

◇ *Analyse*. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On a alors, en particulier (avec $x = y = 0$) :

$$f(0) = 2\,f(0)$$

et donc :

$$f(0) = 0$$

De plus, comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit, en dérivant par rapport à x :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x + y) = f'(x)$$

et en particulier, en prenant $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = f'(0)$$

Ainsi, f' est constante sur $\mathbb{R}$, donc il existe un couple (a, b) de réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

et, comme $f(0) = 0$: $b = 0$.

◇ *Synthèse*. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto ax$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Finalement, on a prouvé par analyse-synthèse que :

L'ensemble des fonctions solutions du problème proposé est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto ax$, où a est un réel quelconque (autrement dit l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Sommaire