

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires sont supposées définies.

Pour toute variable aléatoire X , on convient de noter F_X sa fonction de répartition.

A. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 37.1 ► Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Exercice 37.1 On se propose de démontrer l'inégalité de Markov dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité. Pour cela, on fixe un réel λ strictement positif.

- On suppose que X est une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance et on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs deux à deux distincts telle que :

$$X(\Omega) \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

- Justifier que :

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} \lambda \mathbb{P}(X = x_n)$$

- Conclure.

- On suppose maintenant que X est une variable aléatoire positive, admettant une espérance et une densité de probabilité f . En s'inspirant de la question précédente, démontrer que X vérifie l'inégalité de Markov.

Exercice 37.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

- Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{n}{2t}$$

- Soit $u \in \mathbb{R}^+$.

- Calculer l'espérance de la variable aléatoire e^{uX} .
- En déduire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{e^{-ut}}{2^n} (e^u + 1)^n$$

Exercice 37.3 Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\lambda^r}$$

Théorème 37.2 ► Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve

Comme X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre 2 et donc, d'après en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

De plus la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon)$$

Ainsi on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

ce qui est le résultat attendu puisque :

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X)$$

□

Exercice 37.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \frac{n}{4\varepsilon^2}$$

B. Loi faible des grands nombres**Proposition 37.3 ► Loi faible des grands nombres**

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2 , alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Preuve

Comme les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admettent une même espérance m on a, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \\ &= m \end{aligned}$$

De plus, comme les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et admettent une même variance σ^2 , on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

□

Remarque

Ce théorème assure donc que la suite des fréquences d'apparition d'un certain événement de probabilité p converge en probabilité vers p , ce qui constitue en quelque sorte une justification partielle, *a posteriori*, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

C. Convergence en loi

C.1. Généralités

Définition 37.4

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en loi** vers la variable aléatoire X si, en notant $C(F_X)$ l'ensemble des points en lesquels F_X est continue :

$$\forall x \in C(F_X), \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Dans ce cas, on note : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exercice 37.5

Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

1. (a) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

- (a) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{\lfloor nx \rfloor} = e^{-\lambda x}$$

2. Prouver que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

Remarques

- a. Pour définir la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers X , il est important de noter que l'on n'exige pas que, pour tout réel x , la suite $(F_{X_n}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $F_X(x)$. Par exemple, si l'on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n constante égale à $\frac{1}{n}$, il est naturel de dire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire X constante égale à 0. Cependant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{et} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par conséquent, on peut remarquer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(0) \neq F_X(0)$$

En revanche, on a tout de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) \neq F_X(x)$$

Comme F_X n'est pas continue en 0, on peut donc dire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

- L'exemple précédent permet aussi de comprendre pourquoi il n'est pas nécessaire que la fonction $G : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x)$ soit une fonction de répartition (problème de continuité à droite en 0 dans l'exemple), même dans le cas où elle est définie sur \mathbb{R} .
- Les variables aléatoires X_n et X n'ont pas nécessairement besoin d'être définies sur le même espace probabilisé : il s'agit de la convergence d'une suite de fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .
- Il est intéressant de savoir que, si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X , alors elle converge également en loi vers X (résultat hors programme). En revanche, la réciproque est fautive.
- Attention, de même que dans le cas de la convergence en probabilité, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X et si toutes les variables aléatoires admettent une espérance, il n'est pas sûr que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ni que, si elle converge, sa limite soit $\mathbb{E}(X)$. Toutes les situations peuvent se produire.

Théorème 37.5

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} et X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans \mathbb{Z} . On a alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Remarques

- Dans le cas de suites de variables aléatoires prenant des valeurs entières, ce résultat permet d'étudier plus simplement la convergence en loi. Attention cependant à bien étudier la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, notamment dans les cas où $X_n(\Omega)$ dépend de n .
- Il est important de comprendre que ce résultat ne concerne pas toutes les suites de variables aléatoires discrètes, mais bien seulement celles prenant des valeurs entières. On verra dans le paragraphe suivant qu'une suite de variables aléatoires discrètes peut converger en loi vers une variable aléatoire à densité.

C.2. Théorème limite central

Théorème 37.6 ► Théorème limite central

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right)$$

Alors la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En particulier, on a donc, pour tout couple (a, b) d'éléments de \mathbb{R} tel que $a \leq b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Exercice 37.6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace de probabilité, indépendantes et suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n , son espérance et sa variance.
2. En déduire, à l'aide du théorème central limite, que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

D. Approximations

D.1. Approximations de la loi binomiale

Théorème 37.7 ► Théorème de Poisson

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ et λ un réel strictement positif tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$$

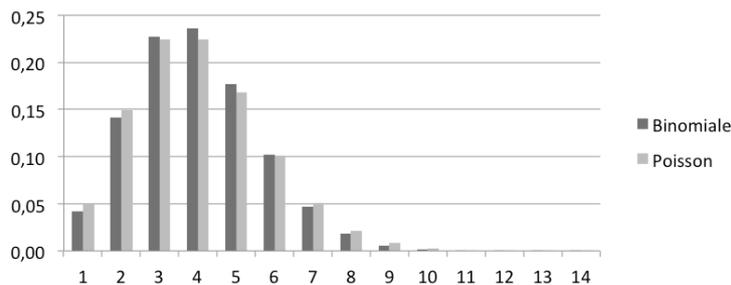
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 37.7 Démontrer le théorème 37.7.

Remarque

Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est « grand » et p « petit ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ dès que n est supérieur ou égal à 30, p inférieur ou égal à $\frac{1}{10}$ et np inférieur à 15. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathcal{B}\left(30, \frac{1}{10}\right)$ et Poisson $\mathcal{P}(3)$ (en ligne apparaît la valeur de k , en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$).



Théorème 37.8

Soit p un réel appartenant à $]0, 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{X}_n = \frac{1}{n} X_n \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right)$$

Alors la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

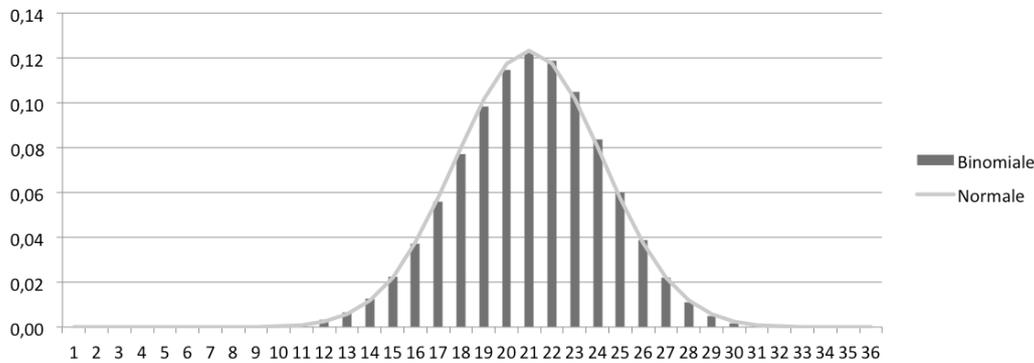
Remarques

- a. Le lecteur avisé aura sans doute remarqué que ce résultat est une conséquence du théorème central limite. En effet, si l'on envisage une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p , alors, en notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{M}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad \bar{M}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{Y}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right)$$

on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires \bar{X}_n^* et \bar{M}_n^* suivent la même loi.

- b. Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ lorsque n est « grand » et p « pas trop éloigné de $\frac{1}{2}$ ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ dès que n est supérieur ou égal à 30, np et $np(1-p)$ supérieurs ou égaux à 5. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathcal{B}\left(50, \frac{7}{10}\right)$ et normale $\mathcal{N}(35; 1,05)$ (en ligne apparaît la valeur de k , en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$ pour la loi binomiale ou de $f(k)$ pour la loi normale).

**D.2. Approximations de la loi de Poisson****Théorème 37.9**

Soit λ un réel strictement positif et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

Alors la suite $(\bar{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Remarques

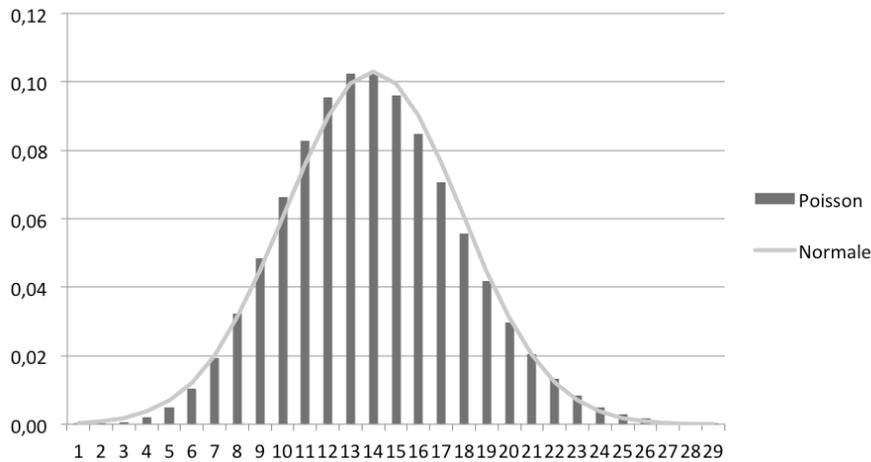
- a. Le lecteur avisé aura sans doute remarqué que ce résultat est une conséquence du théorème central limite. En effet, si l'on envisage une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1, alors, en notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{M}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad \bar{M}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{Y}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right)$$



on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires \bar{X}_n^* et \bar{M}_n^* suivent la même loi.

- b. Ce théorème donne la possibilité d'approcher la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ lorsque λ est « grand ». Dans la pratique, il est d'usage de remplacer la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que λ est supérieur ou égal à 10. Le graphique suivant permet ainsi de comparer les distributions respectives des lois binomiales $\mathcal{P}(20)$ et normale $\mathcal{N}(20, 20)$ (en ligne apparaît la valeur de k , en colonne celle de $\mathbb{P}(X = k)$ pour la loi de Poisson ou de $f(k)$ pour la loi normale).



E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 37-1

1. (b) Comme X admet une espérance et prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ x_n < \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) + \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \mathbb{P}(X = x_n) \geq 0$$

donc :

$$\sum_{\substack{n=0 \\ x_n < \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) \geq 0$$

On en déduit déjà :

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$$

D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \lambda \implies x_n \mathbb{P}(X = x_n) \geq \lambda \mathbb{P}(X = x_n)$$

d'où :

$$\sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} \lambda \mathbb{P}(X = x_n)$$

Ainsi on a bien :

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} \lambda \mathbb{P}(X = x_n)$$

(b) On a donc :

$$\mathbb{E}(X) \geq \lambda \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)$$

De plus, comme X prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_n \geq \lambda} [X = x_n]\right)$$

d'où, comme l'union est formée d'événements deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq \lambda}}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) \geq \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

ce qui donne le résultat attendu en divisant par $\lambda > 0$.

2. Comme f est une densité de X , on a :

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} f(t) dt$$

De plus, comme X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} tf(t) dt$$

donc, d'après la relation de Chasles :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\lambda} tf(t) dt + \int_{\lambda}^{+\infty} tf(t) dt$$

Or la fonction $t \mapsto tf(t)$ est positive sur $[0, \lambda]$ et $0 \leq \lambda$ donc, par croissance de l'intégration :

$$\int_0^{\lambda} tf(t) dt \geq 0$$

On a ainsi :

$$\mathbb{E}(X) \geq \int_{\lambda}^{+\infty} tf(t) dt$$

Par ailleurs on a, comme f est positive :

$$\forall t \geq \lambda, tf(t) \geq \lambda f(t)$$

donc, de nouveau par croissance de l'intégration (avec des intégrales convergentes) :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{+\infty} tf(t) dt &\geq \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} f(t) dt \\ &\geq \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{E}(X) \geq \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

ce qui donne le résultat attendu en divisant par $\lambda > 0$.

Correction de l'exercice 37-2

1. X est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{n}{2t}$$

2. (b) X prend un nombre fini de valeurs, donc e^{uX} aussi et, d'après le théorème de transfert (la fonction $k \mapsto e^{uk}$ est bien définie sur $\llbracket 0, n \rrbracket = X(\Omega)$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{uX}) &= \sum_{k=0}^n e^{uk} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{uk} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^u)^k \end{aligned}$$

d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\mathbb{E}(e^{uX}) = \frac{(e^u + 1)^n}{2^n}$$

(b) Notons tout d'abord que, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur \mathbb{R} et u étant strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(uX \geq ut) = \mathbb{P}(e^{uX} \geq e^{ut})$$

De plus e^{uX} est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov et le résultat précédent, comme $e^{ut} > 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{(e^u + 1)^n}{2^n e^{ut}}$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{e^{-ut}}{2^n} (e^u + 1)^n$$

Correction de l'exercice 37-3

Comme la fonction $t \mapsto t^r$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) = \mathbb{P}(|X|^r \geq \lambda^r)$$

De plus, comme X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre r , $|X|^r$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance donc, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X|^r \geq \lambda^r) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\lambda^r}$$

ce qui prouve le résultat attendu.

Correction de l'exercice 37-4

X suit une loi binomiale, donc elle admet une variance. On a donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} p(1-p) &= p - p^2 \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - p\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \frac{n}{4\varepsilon^2}$$

Correction de l'exercice 37-5

1. (a) Par définition de la partie entière, on sait que :

$$nx - 1 \leq [nx] \leq nx$$

donc :

$$x - \frac{1}{n} \leq \frac{[nx]}{n} \leq x$$

et alors, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$$

(b) On a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]} = \exp [nx] \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\lambda}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

donc :

$$[nx] \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\lambda \frac{[nx]}{n}$$

d'où, avec le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [nx] \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$$

donc, la fonction exponentielle étant continue en $-\lambda x$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]} = e^{-\lambda x}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{X_n}{n}$ prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* , donc on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) &= \mathbb{P}(X_n \leq nx) \\ &= \sum_{k=1}^{[nx]} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{[nx]} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$



et donc, comme $1 - \frac{p}{n} \neq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) &= \frac{p}{n} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}\end{aligned}$$

Finalement, on a donc, d'après le résultat de la question 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = 1 - e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \leq x)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Correction de l'exercice 37-6

1. Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$, d'espérance n et de variance n

2. On remarque donc, que, comme S_n prend ses valeurs dans \mathbb{N} :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \mathbb{P}(S_n \leq n) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right)\end{aligned}$$

De plus, comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance égale à 1 et une variance égale à 1, on a, d'après le théorème central limite :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

et donc, comme la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est continue en 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 37-7

Comme X suit la loi de Poisson de paramètre λ , on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

De plus, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, on a :



$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{Z}_-, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall n > k, \mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} (np_n)^k (1 - p_n)^{n-k}$$

De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$$

et donc, la fonction $t \mapsto t^k$ étant continue en λ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (np_n)^k = \lambda^k$$

Par ailleurs, comme p_n appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 - p_n)^{n-k} = e^{(n-k) \ln(1-p_n)}$$

Or, comme la suite $(np_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers λ et comme $\lambda \neq 0$, on a :

$$np_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda$$

d'où :

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$

En particulier, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$$

et donc :

$$\ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -p_n$$

d'où :

$$(n - k) \ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\lambda$$

et donc, la fonction exponentielle étant continue en $-\lambda$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

On a donc finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

ce qui nous permet de conclure que : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.



Sommaire

Convergence et approximations	1
A. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev	1
B. Loi faible des grands nombres	2
C. Convergence en loi	3
C.1. Généralités	3
C.2. Théorème limite central	4
D. Approximations	5
D.1. Approximations de la loi binomiale	5
D.2. Approximations de la loi de Poisson	6
E. Correction des exercices	7

www.stephanepreteselle.com

