# 36 Compléments sur les variables aléatoires réelles

ECG Maths Appliquées
Semestre 4



Dans tout ce chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies. Pour toute application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, on note :

- $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$ pour tout réel $x$,
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > x\}$ pour tout réel $x$,
- $[X \in I] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\}$ pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$,
- ...

## A. Généralités

### A.1. Notion de variable aléatoire réelle

**Définition 36.1**

On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ appartient à $\mathcal{A}$ (*i.e.* est un événement).

**Remarque** On peut remarquer que tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union et intersection finies d'ensembles de la forme $]-\infty, x]$ et de leurs complémentaires. On peut par exemple remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ]-\infty, x[ = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{k}\right]$$

Les propriétés de l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements assurent donc que, si $X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $[X \in I]$ est un événement pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Proposition 36.2**

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors :

- pour tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- $X_1 X_2 \cdots X_n$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- l'application $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
- l'application $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Remarques**

**a.** Le programme stipulant clairement que « le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un des objectifs du programme », nous nous passerons de démontrer ces résultats.

**b.** Dans la suite, toutes les variables aléatoires envisagées sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

## A.2. Loi d'une variable aléatoire réelle

**Définition 36.3**

Soit $X$ une variable aléatoire. On appelle loi de $X$ la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Remarque** Si $X$ est une variable aléatoire discrète et si $I$ est un intervalle, $I \cap X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, donc l'événement $[X \in I]$ est la réunion au plus dénombrable des événements de la forme $[X = x]$ où $x \in I \cap X(\Omega)$. La $\sigma$-addititivité de $\mathbb{P}$ garantit alors que la connaissance des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ permet de déterminer $\mathbb{P}(X \in I)$ et donc la loi de $X$ : on dit que la loi de $X$ est caractérisée par la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

**Définition 36.4**

Soit $X$ une variable aléatoire. On appelle fonction de répartition de $X$ la fonction $F_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

**Proposition 36.5**

Si $X$ est une variable aléatoire et $F_X$ est sa fonction de répartition, alors :

*i.* $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$,

*ii.* $F_X$ tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

**Exercice 36.1** On se propose de démontrer la proposition 36.5.

1. Prouver que $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Justifier que :

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

   (b) En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

3. Démontrer de même que :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

**Proposition 36.6**

Soit $X$ une variable aléatoire, $F_X$ est sa fonction de répartition. Pour tout couple $(a, b)$ de réels tels que $a < b$, on a :

*i.* $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$

*ii.* $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

*iii.* $\mathbb{P}(X < a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

*iv.* $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

*v.* $\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

*vi.* $\mathbb{P}(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$

*vii.* $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

**Exercice 36.2** On se propose de démontrer la proposition 36.6.

1. Prouver les égalités *i* et *ii*.
2. (a) Justifier que :

$$[X < a] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

   (b) En déduire l'égalité *iii*.
3. Démontrer les égalités *iv* à *vii*.

**Remarque** Une conséquence immédiate et fondamentale de ces résultats est :

**Théorème 36.7**

La loi d'une variable aléatoire $X$ est caractérisée par sa fonction de répartition.

**Proposition 36.8**

Si $X$ est une variable aléatoire et $F_X$ est sa fonction de répartition, alors :

*i.* $F_X$ est continue à droite en tout point,

*ii.* $F_X$ est continue en tout point $a$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

**Exercice 36.3** On se propose de démontrer la proposition 36.8.

1. (a) Justifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ [X \leqslant a] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

   (b) En déduire que $F_X$ est continue à droite en tout point.
2. Justifier alors que $F_X$ est continue en tout point $x$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.

## B. Familles de variables aléatoires réelles

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

### B.1. Variables aléatoires indépendantes

Dans toute la suite, $(X_1, \ldots, X_n)$ désigne un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

**Définition 36.9**

On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$$

**Théorème 36.10**

$X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si on a, pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in I_k)$$

**Théorème 36.11**

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ un un vecteur aléatoire discret, alors $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_k)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

**Proposition 36.12 ▶ Lemme des coalitions**

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et si $p$ est un entier tel que $2 \leqslant p \leqslant n-1$, alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, \ldots, X_n$.
Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors, pour toute permutation $\sigma$ de $[\![1, n]\!]$ et pour toute famille $(i_1, \ldots, i_p)$ d'entiers vérifiant $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$, toute famille de variables aléatoires de la forme $(f_1(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i_1)}), \ldots, f_p(X_{\sigma(i_{p-1}+1)}, \ldots, X_{\sigma(i_p)}))$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

**Exemple 36.1** Si $X, Y, Z, T$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors :

- $X + Y$ et $Z + T$ sont indépendantes,
- $X + Z + T$ et $Y$ sont indépendantes,
- $X$ et $YZT$ sont indépendantes,
- $X, Y, Z + T$ sont mutuellement indépendantes.

## B.2. Propriétés de l'espérance

**Théorème 36.13 ▶ Linéarité de l'espérance**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent une espérance, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

**Remarque** La définition de l'espérance d'une variable aléatoire n'étant pas au programme (ce n'est le cas que pour une variable aléatoire discrète ou à densité), on comprendra l'absence de difficulté technique sur ces points aux concours, les notions envisagées dans cde paragraphe ne faisant que prolonger celles déjà vues dans le cas de variables aléatoires discrètes.

**Théorème 36.14 ▶ Croissance de l'espérance**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires admettant une espérance.
Si, presque sûrement, $X \leqslant Y$, alors : $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

**Théorème 36.15**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent une espérance, alors $X_1 X_2 \cdots X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

**Exercice 36.4** Dans cet exercice, $p$ désigne un élément de $]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = 1) = p$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de $X_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

   (a) Calculer l'espérance de $Y_n$.
   (b) En déduire la loi de $Y_n$.

## B.3. Propriétés de la variance

**Théorème 36.16**

*i.* Si $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes admettant une variance, $X+Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

*ii.* Plus généralement, si $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2, si $X_1,\ldots,X_n$ sont $n$ variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes admettant une variance, alors, pour tout $n$-uplet $(a_1,\ldots,a_n$ de réels :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\ \mathbb{V}(X_k)$$

## C. Correction des exercices

### Correction de l'exercice 36-1

1. Soit $(a,b)$ un couple de réels tel que $a \leqslant b$. On a :

$$[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$$

donc, par croissance de $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant b)$$

soit encore :

$$F_X(a) \leqslant> F_X(b)$$

ce qui prouve que $F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Par définition de $\Omega$, on a évidemment :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n] \subset \Omega$$

Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$. Comme $X(\omega)$ est un réel, on a, en notant $n_\omega = \lfloor X(\omega) \rfloor + 1$ :

$$X(\omega) \leqslant n_\omega$$

d'où :

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

Il en découle :

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]$$

(b) On peut remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [X \leqslant n] \subset [X \leqslant n+1]$$

donc, d'après le théorème de la limite monotone et le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n)$$

d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(n) = 1$$

Il est malheureusement trop tôt pour conclure ($n$ tend ici vers $+\infty$ par valeurs entières uniquement). Par ailleurs, $F_X$ étant croissante, le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite (finie ou infinie) pour $F_X$ en $+\infty$. Par composition, on a alors nécessairement :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = 1$$

3. On a de même :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant -n] = \varnothing$$

d'où, comme la suite $([X \leqslant -n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante :

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par ailleurs, $F_X$ admet aussi une limite en $-\infty$ (car elle est croissante), donc nécessairement :

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = 0$$

### Correction de l'exercice 36-2

1. ► On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > a) &= \mathbb{P}(\overline{[X \leqslant a]}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) \\ &= 1 - F_X(a)\end{aligned}$$

► On a également :

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}([X \leqslant b] \cap \overline{[X \leqslant a]})$$

donc, d'après la formule des probabilités totales, comme $([X \leqslant a], \overline{[X \leqslant a]})$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}([X \leqslant b] \cap [X \leqslant a])$$

d'où, comme $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X \leqslant b) &= \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a) \\ &= F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant a$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \subset [X < a]$$

d'où :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \subset [X < a]$$

Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) < a$. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) = a$$

donc, par définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ X(\omega) \leqslant a - \frac{1}{n}$$

d'où :

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

On en déduit :

$$[X < a] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

donc finalement :

$$[X < a] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right]$$

(b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant a - \frac{1}{n+1}$$

donc, d'après le résultat de la question précédente et le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(X < a) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(X \leqslant a - \frac{1}{n}\right)$$

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, comme $F_X$ est croissante sur $]-\infty, a[$ elle a une limite en $a$ à gauche, d'où :

$$\mathbb{P}(X < a) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

3. ► De même que pour le point *ii*, on a :

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X < a)$$

donc, d'après *iii* :

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

► On a de la même façon :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leqslant X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) \\ &= \lim_{x \to b^-} F_X(x) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)\end{aligned}$$

► Encore une fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leqslant a) \\ &= \lim_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)\end{aligned}$$

► Enfin on a de même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = a) &= \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant a) \\ &= F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)\end{aligned}$$

## Correction de l'exercice 36-3

1. (b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a \leqslant a + \frac{1}{n}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [X \leqslant a] \subset \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

d'où :

$$[X \leqslant a] \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$$

donc, par prolongement des inégalités (on fait tendre $n$ vers $+\infty$) :

$$X(\omega) \leqslant a$$

d'où :

$$\omega \in [X \leqslant a]$$

On en déduit :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right] \subset [X \leqslant a]$$

donc finalement :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ [X \leqslant a] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[X \leqslant a + \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$$

donc, par croissance de la probabilité $\mathbb{P}$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$$

Enfin, comme $F_X$ est croissante sur $]a, +\infty[$, le théorème de la limite monotone assure que $F_X$ admet une limite en $a$ à droite, ce qui entraîne, avec l'égalité précédente :

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{x \to a^+} F_X(x)$$

Ainsi $F_X$ est continue à droite en tout point.

2. On a vu que :

$$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < a)$$

Comme $\mathbb{P}(X = a) = 0$, on a donc :

$$\lim_{x \to a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F_X(a)$$

ce qui prouve que $F_X$ est continue à gauche en tout point $a$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0$, nous permettant de conclure avec le résultat de la question précédente.

## Correction de l'exercice 36-4

1. ► Comme $X_n$ prend un nombre fini de valeurs ($-1$ et $1$), $X_n$ admet une espérance et une variance et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= -\mathbb{P}(X_n = -1) + \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= -\left[1 - \mathbb{P}(X_n = 1)\right] + \mathbb{P}(X_n = 1) \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 2p - 1}$$

► Comme $X_n$ ne prend que les valeurs $-1$ et $1$, $X_n^2$ est constante égale à 1 et on a :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 1$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2 \\ &= 1 - (1-2p)^2\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = 4p\,(1-p)}$$

2. (a) Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettent une espérance, $Y_n$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = (2p-1)^n}$$

(b) On peut déjà remarquer que, comme $X_1, \ldots, X_n$ ne prennent que les valeurs $-1$ et $1$, $Y_n$ ne prend que les valeurs $-1$ et $1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= -\mathbb{P}(Y_n = -1) + \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ &= 2\,\mathbb{P}(Y_n = 1) - 1\end{aligned}$$

donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$2\,\mathbb{P}(Y_n = 1) - 1 = (2p-1)^n$$

et donc :

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{(2p-1)^n + 1}{2}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_n \text{ prend ses valeurs dans } \{-1, 1\} \text{ et sa loi est caractérisée par :} \\ \mathbb{P}(Y_n = 1) = \dfrac{(2p-1)^n + 1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = \dfrac{1-(2p-1)^n}{2} \end{array}}$$

# Sommaire