35 Variables aléatoires à densité

ECG Maths Appliquées
Semestre 4

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies.

A. Définition et premières propriétés

A.1. Fonction de répartition

Définition 35.1

On appelle **variable aléatoire à densité** toute variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Remarque Si X est une variable aléatoire à densité, $X(\Omega)$ est infini non dénombrable. En pratique, pour les variables aléatoires à densité, il est rare que l'on cherche à déterminer précisément $X(\Omega)$.

Proposition 35.2

Si X est une variable aléatoire à densité, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) = 0$.

Preuve Supposons que X soit une variable aléatoire à densité. On sait (*cf.* chapitre 28. Généralités sur les variables et vecteurs aléatoires) que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X < x) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x) - \lim_{t \to x^-} \mathbb{P}(X \leqslant t)\end{aligned}$$

De plus, comme la fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{t \to x^-} \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$$

□

Remarque Par conséquent, si X est une variable aléatoire à densité, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathbb{P}(X > x)$$

Proposition 35.3

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

i. F est continue sur $\mathbb{R}$,

ii. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points,

iii. F est croissante sur $\mathbb{R}$,

iv. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Exercice 35.1 Dans cet exercice, c et α désignent deux réels strictement positifs et on considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

Remarques

a. Si on sait déjà que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire, il suffit de prouver les points *i* et *ii* pour prouver que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

b. Quand on doit déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, il est donc nécessaire que celle-ci vérifie les points précédents. Par conséquent, une fois cette fonction trouvée, il peut donc être utile de s'assurer au brouillon que celle-ci est bien continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points, et qu'elle tend bien vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$ pour s'assurer de la vraisemblance du résultat.

A.2. Densité

Définition 35.4

Si X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X, on appelle densité de X toute fonction f_X définie et positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f_X(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Remarques

a. Si X est une variable aléatoire à densité, elle admet plusieurs densités (et même une infinité). En effet, si f est une densité de X, il suffit de changer la valeur de f en un point (du moment que l'on donne une image positive) pour obtenir une autre densité de X. Il convient donc de parler d'une densité et non de la densité de X. Toutefois, on remarquera que deux densités d'une même variable aléatoire ne diffèrent entre elles qu'en un nombre fini de points.

b. Quand F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, on choisit en général $f_X = F'_X$. Il arrive dans ce cas que l'on parle de la densité de X.

Exercice 35.2 Soit c et α deux réels strictement positifs et X une variable aléatoire à densité admettant pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer une densité de X.

Proposition 35.5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est une densité de probabilité si et seulement si :

i. f est positive sur $\mathbb{R}$,

ii. f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points,

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 35.3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Prouver que f est une densité de probabilité.

Remarques

a. Attention, une densité de probabilité n'est pas nécessairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, comme le prouve l'exercice précédent.

b. Comme le montre l'exemple précédent également, si on veut prouver que f est une densité de probabilité, il ne faut pas oublier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est certes impropre en $-\infty$ et $+\infty$, mais elle peut également avoir d'autres problèmes de convergence.

c. Si on veut montrer que f est une densité de probabilité et si f n'est pas continue en a, il n'est pas nécessaire de chercher ses limites éventuelles en a à gauche et en a à droite.

d. Quand on doit déterminer une densité d'une variable aléatoire à densité, il est donc nécessaire que celle-ci vérifie les points précédents. Par conséquent, une fois cette fonction trouvée, il peut être utile de s'assurer au brouillon que celle-ci est bien positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Proposition 35.6

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f_X, alors :

i. $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

ii. $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geqslant x) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

iii. $\displaystyle\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ /\ a < b,\ \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t,$

Remarque D'après 35.2, on a donc plus généralement, si (a,b) est un couple de réels tel que $a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 35.7

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f_X, alors :

$$f_x(x) = F_X'(x) \text{ pour tout réel } x \text{ en lequel } f_X \text{ est continue}$$

Preuve Soit X une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F et dont une densité est f. Soit x_0 un point en lequel f est continue. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f soit continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. On a alors, d'après la relation de Chasles :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_0-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0-\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, comme f est continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0-\alpha}^{x} f(t)\,dt$ en est une primitive sur cet intervalle, donc y est dérivable.

Ainsi, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0-\alpha} f(t)\,dt$ est indépendant de x, F_X est dérivable en x_0 et : $F_X'(x_0) = f(x_0)$.

□

Remarques

a. En particulier, si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction de répartition F_X de X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $f'_X = f_X$.

b. Si X est une variable aléatoire à densité, toute densité de X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de point donc, si f_X est une densité de X, il existe un ensemble fini E tel que F_X soit dérivable sur $\mathbb{R} \setminus E$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus E,\ F'_X(x) = f_X(x)$$

A.3. Transformation affine d'une variable aléatoire à densité

Théorème 35.8

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de X. Pour tout couple (a, b) de réels tel que $a \neq 0$, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité est la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Remarque À propos des transformations affines de variables aléatoires à densité, le programme stipule « les candidats devront savoir calculer la fonction de répartition et [une] densité de $aX + b$ », ce qui laisse entendre que le résultat précédent n'est pas au programme, mais qu'il faut en maîtriser parfaitement la preuve.

Exercice 35.4 Démontrer le théorème 35.8.

B. Moments d'une variable aléatoire à densité

B.1. Espérance

Définition 35.9

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On dit que X admet une **espérance** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque l'espérance de X est nulle, on dit que X est une variable aléatoire centrée.

Exercice 35.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 35.6 Soit c et α deux réels strictement positifs et X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x \geqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier l'existence, et déterminer la valeur le cas échéant, de l'espérance de X.

Proposition 35.10

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors :

i. si X est une variable aléatoire positive, alors : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance),

ii. pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b \text{ (linéarité de l'espérance)}$$

B.2. Théorème de transfert

Théorème 35.11 ▶ Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On suppose que $X(\Omega)$ est un intervalle d'extrémités a et b telles que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Si φ est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et continue sur $X(\Omega)$ éventuellement privé d'un ensemble fini, alors $Y = \varphi \circ X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques

a. Attention, le théorème de transfert ne garantit pas l'existence de l'espérance de $\varphi \circ X$. Pour l'utiliser, il s'agira donc toujours de justifier son existence, soit avec la définition (si on connaît une densité de $\varphi \circ X$, soit en prouvant l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Dans ce théorème, il est fondamental de ne pas oublier l'absolue convergence, qui n'équivaut en général pas à la convergence simple dans ce cas.

c. On pourra remarquer que ce résultat implique l'équivalence entre l'existence de l'espérance de X et de celle de $|X|$.

B.3. Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 35.12

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** si X^r admet une espérance (c'est-à-dire, d'après le théorème de transfert, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente). Dans ce cas le moment d'ordre r, noté $m_r(X)$ est défini par :

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Comme f_X est une densité de probabilité, elle est positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto t^r f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.

B.4. Variance. Écart-type

Définition 35.13

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On dit que X admet une **variance** si X admet une espérance et si $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas, la variance de X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Si X admet une variance, on appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Lorsque la variance de X est égale à 1, on dit que X est une variable aléatoire réduite.

Remarques

a. De même que pour l'espérance, on retiendra qu'une variable aléatoire peut ne pas admettre de variance et qu'il est donc fondamental d'en prouver l'existence avant d'envisager de la calculer.

b. Se souvenir que, par définition de la variance, quand elle existe, est toujours positive.

c. Il est rare que la définition soit utile : pour calculer la variance d'une variable aléatoire à densité, quand elle existe, on utilise le plus souvent la proposition 35.15.

d. L'expression de $\mathbb{V}(X)$ sous forme d'intégrale est une conséquence immédiate du théorème de transfert.

Proposition 35.14

Soit X une variable aléatoire à densité.
X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.

Preuve

$\diamond$ On suppose que X admet une variance et on note f une densité de X. Dans ce cas, X admet une espérance et les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. De plus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 f(t) = (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) + 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) - (\mathbb{E}(X))^2 f(t)$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc que X admet un moment d'ordre 2.

$\diamond$ Supposons que X admette un moment d'ordre 2. On a vu dans l'exercice 29.7 qu'alors X admet une espérance. Ainsi, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. De plus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) = t^2 f(t) - 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) + [\mathbb{E}(X)]^2 f(t)$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc que X admet une variance.

□

Proposition 35.15 ▸ Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire à densité.
Si X admet une variance, alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Preuve D'après 35.14, comme X admet une variance, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X)$ existent. Ainsi, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont toutes convergentes et, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(t^2 f(t) - 2t\,\mathbb{E}(X)\,f(t) + [\mathbb{E}(X)]^2 f(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\,\mathbb{E}(X)\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t + [\mathbb{E}(X)]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \times 1 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\end{aligned}$$

□

Proposition 35.16

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX+b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$$

C. Lois usuelles

C.1. Loi uniforme sur un intervalle

Dans cette partie, a et b sont deux réels tels que : $a < b$.

Proposition 35.17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une densité de probabilité.

Preuve f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, a[$, $]a,b[$ et $]b,+\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points). De plus, f étant continue sur $[a,b]$ et nulle en dehors, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{b-a} = 1$$

donc f est une densité de probabilité.

□

Définition 35.18

On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a,b]$ (notée $\mathcal{U}([a,b])$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques

a. À la lecture d'un énoncé, attention à ne pas confondre loi uniforme à densité (sur un intervalle) et loi uniforme discrète (sur une partie finie de $\mathbb{Z}$).

b. On rappelle que, si E est une partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{1}_E$ désigne la fonction indicatrice de E, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Proposition 35.19

Si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, alors sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Preuve Comme X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\forall x \in \left]-\infty, a\right[,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t$$

et d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b],\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{b-a} \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]b, +\infty\right[,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{b-a} + \int_{b}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Proposition 35.20

Si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 35.7 Démontrer la proposition 35.20.

Remarque Attention, si a et b sont deux entiers, si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![a,b]\!]$ et si Y suit la loi uniforme à densité sur $[a,b]$, X et Y admettent la même espérance mais pas la même variance.

Proposition 35.21

Si X est une variable aléatoire alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \iff a + (b-a)\,X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$$

Remarque Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

C.2. Loi exponentielle

Dans cette partie, λ est un réel strictement positif.

Proposition 35.22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est une densité de probabilité.

Preuve f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points). De plus, f étant nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature et valeur en cas de convergence. Par ailleurs, la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est continue et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, nous permettant finalement d'affirmer que f est une densité de probabilité.

□

Définition 35.23

On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ (notée $\mathcal{E}(\lambda)$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 35.24

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors sa fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Remarque Les calculs ont été faits dans la preuve de 35.22.

Proposition 35.25

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 35.8 Démontrer la proposition 35.25.

Proposition 35.26

Si X est une variable aléatoire alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\, X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

b. En cas de doute sur la formule, il suffit de penser à vérifier à l'aide de la valeur de l'espérance.

Théorème 35.27 ▶ Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(X > x) \neq 0$$

X suit la loi exponentielle si et seulement si sa loi est sans mémoire, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y)$$

C.3. Loi normale

Dans cette partie, m est un réel et σ est un réel strictement positif.

Proposition 35.28

La fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

est une densité de probabilité.

Remarque En particulier, dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$, on retiendra que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = 1$$

La preuve de ce résultat fait l'objet d'un grand nombre d'exercices ou de problèmes de concours.

Définition 35.29

On dit que X suit la **loi normale** de paramètre m et σ^2 (notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$) si elle admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

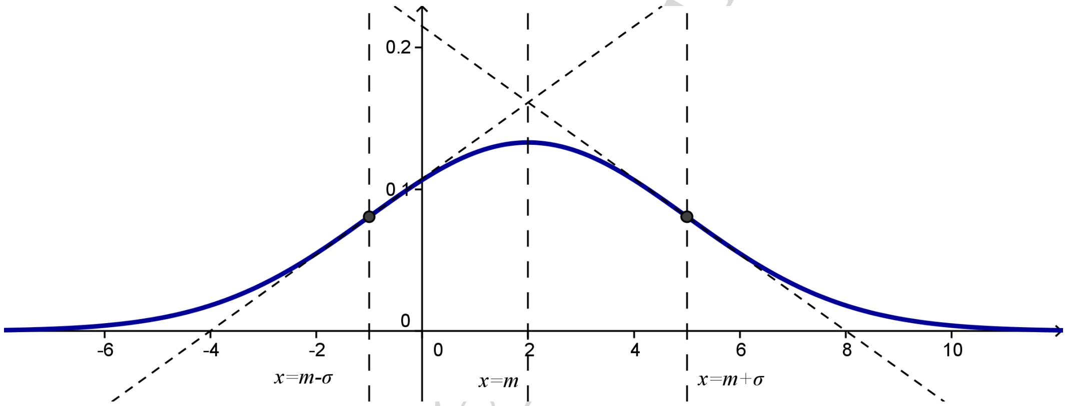
Remarques

a. Une variable aléatoire suivant une loi normale est dite gaussienne.

b. Le graphe de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est une « courbe en cloche » qui admet :

- un axe de symétrie : la droite d'équation $x = m$,
- deux points d'inflexion : les points d'abscisses respectives $x - \sigma$ et $x + \sigma$.

Par exemple, pour $m = 2$ et $\sigma = 3$, le graphe de cette fonction est le suivant :



Proposition 35.30

Si X est une variable aléatoire :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \Longleftrightarrow \sigma X + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

Remarques

a. Ce résultat est une conséquence immédiate de 35.8.

b. En cas de doute sur la formule, il faut penser à vérifier à l'aide de la valeur de l'espérance.

Proposition 35.31

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En notant Φ sa fonction de répartition, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Preuve Comme X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

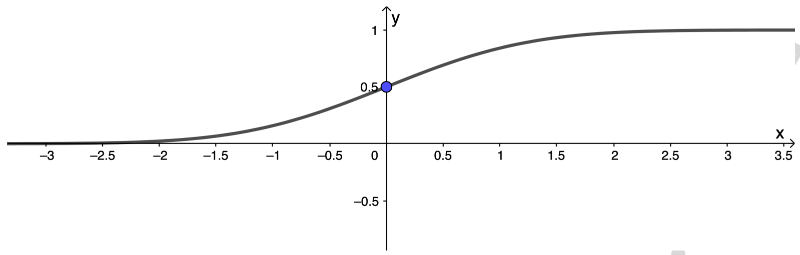
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

donc, en effectuant le changement de variable affine $u = -t$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) &= \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathbb{P}(X > x) \\ &= 1 - \Phi(x)\end{aligned}$$

□

Remarque Ainsi la courbe représentative de Φ dans un repère orthonormé admet pour centre de symétrie le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. L'allure de la courbe représentative de Φ est la suivante :



Proposition 35.32

Si X suit la loi normale de paramètres m et σ^2, X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

En particulier, si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, X est centrée et réduite ; dans ce cas, on dit donc que X suit la loi normale centrée réduite.

Exercice 35.9 Démontrer la proposition 35.32.

C.4. Tableau récapitulatif des lois usuelles

Loi	$\boldsymbol{X(\Omega)}$ **(usuel)**	**Densité usuelle**	**Espérance**	**Variance**
Uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$x \mapsto \dfrac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	0	1
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

Remarque L'ensemble $X(\Omega)$ est donné ici à titre indicatif, et il serait en fait préférable de dire que X prend presque sûrement ses valeurs dans l'ensemble proposé : les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ étant toutes nulles, on ne change pas la loi de X en changeant une valeur particulière $X(\omega)$.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 35-1

Comme c et α sont strictement positifs, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, c[$ et sur $[c, +\infty[$ et on a :

$$\lim_{x \to c^-} F(x) = 0 = F(c)$$

donc F est aussi continue à gauche en c, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

et, comme $\alpha > 0$ et $c > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Enfin, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\},\ F'(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}\left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{c\},\ F'(x) \geqslant 0$$

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui nous permet maintenant de conclure que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

Correction de l'exercice 35-2

On a déjà vu dans l'exercice 29.1 que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Toute fonction positive coïncidant avec F' en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ est une densité de X, donc X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}\left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x \geqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 35-3

f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, $[0,1]$ et $]1,+\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1), positive sur $\mathbb{R}$. De plus, comme f est continue sur $[0,1]$ et nulle en dehors, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{2}{1+x}\right]_0^1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que f est une densité de probabilité.

Correction de l'exercice 35-4

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $a \neq 0$. Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$, c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, donc Y aussi.
De plus, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ [Y \leqslant y] = \begin{cases} \left[X \leqslant \dfrac{y-b}{a}\right] & \text{si } a > 0 \\ \left[X \geqslant \dfrac{y-b}{a}\right] & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$, on en déduit que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ [Y \leqslant y] \in \mathcal{A}$$

donc Y est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Finalement, comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une partie finie, on en déduit que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'une partie finie donc que Y est une variable aléatoire à densité, dont une densité peut être obtenue par dérivation de F_Y en tout point y de dérivabilité et en prenant une valeur arbitraire positive en tout autre point, donc en particulier on peut choisir la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ -\dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 35-5

Comme X prend ses valeurs dans $[0,1]$ presque sûrement et comme $[0,1]$ est un intervalle borné, X admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{2\,(1+x)-2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \left[2\ln|1+x| + \frac{2}{1+x}\right]_0^1 \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = 2\ln(2) - 1$$

Correction de l'exercice 35-6

On a vu dans l'exercice 29.2 que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}\left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x \geqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme f est nulle sur $]-\infty, c[$, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_c^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. De plus, la fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue et positive sur $[c, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \geqslant c,\ x f(x) = \frac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha}}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et comme $\alpha c^{\alpha} \neq 0$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, donc X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.
On suppose désormais que : $\alpha > 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_c^{+\infty} \frac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to+\infty} \left[\alpha c^{\alpha}\,\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^y \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{\alpha c}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{y^{\alpha-1}}\right] \end{aligned}$$

et finalement (comme $\alpha - 1 > 0$) :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1}$$

Correction de l'exercice 35-7

Comme X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[a,b]$ et nulle en dehors, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$$

donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2\,(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{3\,(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que X admet une variance et que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 35-8

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en dehors, donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

et donc, comme $\lambda > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Finalement, X admet donc une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

De même, $\mathbb{E}(X^2)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + 2\int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= -x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et donc, comme $\lambda > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$. Finalement, X admet donc un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}$$

Finalement, X admet donc une variance et :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Correction de l'exercice 35-9

Compte tenu de la proposition 35.30 et des propriétés de l'espérance et de la variance, il suffit de démontrer le résultat dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$. Dans ce cas, X admet pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

La fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est alors une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$ donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que, dans ce cas, l'espérance est nulle. Or on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^3\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$$

d'où :

$$t\varphi(t) \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, on en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit finalement que X admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto t^2\varphi(t)$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, donc X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x t \times (-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\,\mathrm{d}t$$

donc, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et donc, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\frac{1}{2}$ (car φ est une densité de probabilité paire) :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathbb{E}(X^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 1$$

et alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1$$

Sommaire