32 Variables aléatoires discrètes

ECG Maths Appliquées
Semestre 2

Quand on étudie un phénomène aléatoire, il arrive fréquemment que l'on soit conduit à étudier des grandeurs numériques associées à cette expérience (gain à une loterie, nombre de « face » obtenus dans une suite de lancers de pièce,). C'est dans ce cadre que l'on est en général amené à définir une variable aléatoire : en termes simples, une variable aléatoire réelle sera une application X qui, à une résultat ω de l'expérience, fait correspondre un nombre réel $X(\omega)$.
Considérons par exemple le jeu suivant : on lance une pièce équilibrée 10 fois et un joueur parie sur le nombre de « face » apparaissant. Il peut être intéressant, avant de parier, de déterminer quel nombre a le plus de chance d'apparaître.
Le nombre de « face » obtenu étant fonction du résultat de l'expérience, on peut modéliser l'expérience en posant :

$$\Omega = \{P, F\}^{10} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$$

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (puisque la pièce est supposée équilibrée). On peut également définir l'application X qui à un résultat associe le nombre de « face » obtenus. On cherche, pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement « X prend la valeur k », c'est-à-dire, en pratique, de l'événement :

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) = k\}$$

Pour simplifier, cet événement sera noté $\{X = k\}$ ou $[X = k]$.
On peut remarquer qu'il y a 2^{10} suites de 10 lancers possibles (2 résultats possibles à chacun des 10 lancers), toutes équiprobables et que, parmi celles-ci $\binom{10}{k}$ mènent à la réalisation de l'événement $[X = k]$ (autant que de choix des k lancers donnant « face », les $10 - k$ autres donnant alors nécessairement « pile »), on a donc :

$$\forall k \in [\![1, 10]\!], \; \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$$

Dès lors, pour répondre à la question initiale, on est conduit à étudier les variations de la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{0 \leqslant k \leqslant 10}$.
Or cette suite est strictement positive et, pour $k \in [\![0, 9]\!]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X = k+1])}{\mathbb{P}([X = k])} &= \frac{\binom{10}{k+1}}{\binom{10}{k}} \\ &= \frac{10-k}{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X = k+1])}{\mathbb{P}([X = k])} > 1 &\iff \frac{10-k}{k+1} > 1 \\ &\iff 10 - k > k + 1 \\ &\iff k < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \mathbb{P}([X = 0]) < \mathbb{P}([X = 1]) < \mathbb{P}([X = 2]) < \mathbb{P}([X = 3]) < \mathbb{P}([X = 4]) < \mathbb{P}([X = 5]) \\ \mathbb{P}([X = 5]) > \mathbb{P}([X = 6]) > \mathbb{P}([X = 7]) > \mathbb{P}([X = 8]) > \mathbb{P}([X = 9]) > \mathbb{P}([X = 10]) \end{cases}$$

Si le joueur veut avoir la plus grande probabilité de gagner, il a donc intérêt à parier qu'il y aura 5 « face » (ce que certains auraient sans doute deviné intuitivement... mais qui n'est plus vrai si la pièce est truquée).
L'objectif de ce chapitre est de se donner quelques outils pour étudier le comportement de ces grandeurs réelles régies par des phénomènes aléatoires.

A. Généralités

A.1. Définition

Définition 32.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle **variable aléatoire réelle discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable (*i.e.* en bijection avec une partie de $\mathbb{N}^*$),
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (*i.e.* est un événement).

Dans ce cas, si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie** si $X(\Omega)$ est fini ; si $X(\Omega)$ est dénombrable, on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie**.

Remarque Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$, aussi noté $[X \leqslant x]$, est un événement. En effet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [X \leqslant x] = \bigcup_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = y\}$$

Or, pour tout $y \in X(\omega)$, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = y\}$ est un événement et l'ensemble $\{y \in X(\Omega),\ y \leqslant x\}$ est fini ou dénombrable (car $X(\omega)$ l'est). Ainsi $[X \leqslant x]$ est une réunion au plus dénombrable d'événements, donc c'est un événement.

Notation 32.2

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ et si a et b sont deux réels tels que $a < b$, $X^{-1}(\{a\})$, $X^{-1}(]-\infty, a])$, $X^{-1}([a, b])$, $X^{-1}(]a, b])$, $X^{-1}(]a, b[)$, $X^{-1}([b, +\infty[)$ et $X^{-1}(]b, +\infty[, \ldots$ sont donc des événements, et l'on adopte les notations suivantes :

i. $[X = a]$ désigne l'événement $X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$,

ii. $[X \leqslant a]$ désigne l'événement $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant a\}$,

iii. $[a \leqslant X \leqslant b]$ désigne l'événement $X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$,

iv. $\ldots$

Exemple 32.1 Si on effectue une suite de 4 lancers indépendants d'une pièce équilibrée et si on note $\Omega = \{P, F\}^4$ et $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, alors l'application X qui à tout élément ω de Ω associe le nombre de « pile » obtenus dans la suite de résultats ω est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
De plus, $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$ est fini, donc X est une variable aléatoire discrète finie.
Dans cet exemple, on a donc, par exemple :

$$[X = 3] = \{(P, P, P, F), (P, P, F, P), (P, F, P, P), (F, P, P, P)\}$$

et :

$$[X < 2] = \{(F, F, F, F), (P, F, F, F), (F, P, F, F), (F, F, P, F), (F, F, F, P)\}$$

Remarques

a. S'il n'y a pas de confusion possible quant à l'espace probabilisable sur lequel est définie la variable aléatoire, on pourra oublier de le préciser. De même, les variables aléatoires étudiées ici étant toutes réelles, on parlera plus simplement de variable aléatoire au lieu de variable aléatoire réelle.

b. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable tel que $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

c. Attention au vocabulaire : si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, X est donc une application, Ω est son ensemble de définition et $X(\Omega)$ est son **ensemble image** (aussi appelé ensemble des valeurs prises par X). On se gardera donc de parler d'un obscur « univers de X », qui n'a pas de sens.

d. On rappelle que l'écriture $X^{-1}(\{k\})$ ne signifie pas que X est bijective (ce qui est rarissime pour une variable aléatoire) : il s'agit d'une notation pour parler de l'ensemble des antécédents de k par X, *i.e.* de l'image réciproque de k par X.

e. Si X est une variable aléatoire et s'il existe un réel a tel que $X(\Omega) = \{a\}$, on dit que X est une **variable aléatoire constante** (ou certaine) égale à a.

f. Par analogie, et pour simplifier les notations, on conviendra d'adopter ces mêmes notations pour toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$, qu'il s'agisse ou non d'une variable aléatoire.

A.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarques

a. Compte tenu de la définition d'une variable aléatoire, pour tout intervalle I, $X^{-1}(I)$ est un élément de $\mathcal{A}$, donc admet une probabilité $\mathbb{P}(X^{-1}(I))$, aussi notée $\mathbb{P}(X \in I)$.

b. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ et $[X = x]$ admettent des probabilités, $\mathbb{P}([X \leqslant x])$ et $\mathbb{P}([X = x])$. Pour ne pas alourdir les notations, ces probabilités pourront être notées $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ et $\mathbb{P}(X = x)$.

Définition 32.3

Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, c'est déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ et, pour tout réel x appartenant à $X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.

Exercice 32.1 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. Déterminer la loi de X.

Remarques

a. Attention, deux variables aléatoires peuvent suivre la même loi sans être égales : par exemple, si on effectue un unique lancer d'une pièce équilibrée et que l'on note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale à 1 si on a obtenu « pile » (resp. « face ») et à 0 sinon, X et Y suivent la même loi, mais ne sont pas égales puisque, quand l'une est égale à 1, l'autre est égale à 0. On a même : $Y = 1 - X$.

b. Si X est une variable aléatoire et s'il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$, on dit que X est une **variable aléatoire presque sûrement constante** égale à a.

Définition 32.4

L'application $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction de répartition de $\boldsymbol{X}$**.

Exemple 32.2 Dans l'exercice précédent, on peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [X \leqslant x] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x < 0 \\ [X=0] & \text{si } x \in [0,1[\\ [X=0] \cup [X=1] & \text{si } x \in [1,2[\\ [X=0] \cup [X=1] \cup [X=2] & \text{si } x \in [2,3[\\ \Omega & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

et donc, comme les événements $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$ et $[X = 3]$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbb{P}(X=0) & \text{si } x \in [0,1[\\ \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) & \text{si } x \in [1,2[\\ \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) & \text{si } x \in [2,3[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

donc la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{si } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [1,2[\\ \dfrac{7}{8} & \text{si } x \in [2,3[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Remarque La fonction de répartition d'une variable aléatoire est peu utile dans les sujets portant uniquement sur les variables aléatoires discrètes, et c'est pourquoi leurs propriétés sont développées ultérieurement (voir chapitre 31).

Proposition 32.5

Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} \mathbb{P}(X = x_i)$$

Preuve On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [X \leqslant x] = \bigcup_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} [X = x_i]$$

et donc, cette union étant étant finie ou dénombrable (car I, étant une partie de $\mathbb{N}$, est fini ou dénombrable) et les événements $[X = x_i]$, $i \in I$, étant deux à deux disjoints :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} \mathbb{P}(X = x_i)$$

ce qui est le résultat attendu.

□

Proposition 32.6

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

Preuve Ce résultat découle de manière immédiate du résultat précédent. En effet, comme X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, d'après 32.5 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X = k)$$

soit encore, en rajoutant les termes $\mathbb{P}(X = k)$ nuls si k n'appartient pas à $X(\Omega)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)$$

et alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_X(n) - F_X(n-1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{P}(X = n) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut remarquer que, comme X prend des valeurs positives uniquement :

$$F_X(-1) = 0$$

donc on a encore :

$$F_X(0) - F_X(-1) = \mathbb{P}(X = 0)$$

□

A.3. Système complet associé à une variable aléatoire discrète

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{A})$ désigne un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète.

Proposition 32.7

Si X est une variable aléatoire discrète, la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événement, appelé **système complet d'événements associé** à X.

Preuve Comme X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, les événements de l'ensemble $\{[X = x],\ x \in X(\Omega)\}$ sont deux à deux incompatibles, non impossibles et, par définition, on a :

$$\begin{aligned}\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] &= \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega \ /\ X(\omega) = x\} \\ &= \Omega\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

A.4. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 32.8

Si $X(\Omega) \subset \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} = 1$$

Remarques

- **a.** Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition A.3.
- **b.** Après avoir trouvé la loi d'une variable aléatoire, on peut donc vérifier que le résultat est vraisemblable en vérifiant que la somme de toutes les probabilités trouvées est égale à 1.
- **c.** Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels telle que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$, il n'est pas sûr que l'on ait $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\} = E$: d'une part toutes les valeurs de E ne sont pas nécessairement prises par X, d'autre part X peut prendre des valeurs n'appartenant pas à E (mais alors nécessairement avec probabilité nulle. En revanche, on a : $\mathbb{P}(X \in E) = 1$.

Définition 32.9

Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si $(p_i)_{i \in I}$ est une suite réelle, on dit que $(p_i)_{i \in I}$ est le **germe d'une loi de probabilité** sur $\mathbb{N}$ (ou plus simplement définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$) si tous ses termes sont positifs et si la somme $\sum_{i \in I} p_i$ existe et vaut 1.

Exercice 32.2 Soit λ un réel strictement positif. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

A.5. Fonction d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète.

Théorème 32.10

Si φ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $\varphi \circ X$, aussi notée $\varphi(X)$, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemple 32.3 Si X est une variable aléatoire discrète alors, pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$, X^2, $\mathrm{e}^X, \ldots$ sont des variables aléatoires discrètes.

Preuve Comme X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et comme φ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi \circ X$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. De plus, comme X est une variable aléatoire discrète, $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, donc $(\varphi \circ X)(\Omega) = \{\varphi(x),\ x \in X(\Omega)\}$ est au plus dénombrable. Enfin, on a, en notant $(\varphi \circ X)(\Omega) = \{y_i,\ i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\forall i \in I,\ [\varphi \circ X = y_i] &= \{\omega \in \Omega \ / \ (\varphi \circ X)(\omega) = y_i\} \\ &= \{\omega \in \Omega \ / \ \exists x \in X(\Omega)\ :\ \varphi(x) = y_i \text{ et } X(\omega) = x\} \\ &= \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y_i}} [X = x] \end{aligned} \tag{32.1}$$

Or, comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, les ensembles $[X = x]$ appartiennent à $\mathcal{A}$ pour tout $x \in X(\omega)$ et donc, comme $\mathcal{A}$ est stable par union au plus dénombrable et comme c'est le cas de la dernière union (car $X(\Omega)$ est au plus dénombrable) :

$$\forall i \in I,\ [\varphi \circ X = y_i] \in \mathcal{A}$$

donc $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

□

Proposition 32.11

Si φ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors la loi de $Y = g(X)$ est donnée par :

$$Y(\Omega) = \{g(x),\, x \in X(\Omega)\} \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

Preuve Ce résultat découle de manière immédiate de (32.1) et de la σ-additivité de $\mathbb{P}$. □

B. Moments d'une variable aléatoire discrète

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies.

B.1. Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 32.12

i. Si X est une variable aléatoire discrète **finie** telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (où n est un entier naturel non nul), on appelle **espérance de X** le réel noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

ii. Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** telle que $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$, on dit que X admet une espérance si la série $\sum x_i\, \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente et, dans ce cas, on appelle **espérance de X** le réel noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exercice 32.3 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 26.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

Remarques

a. Lorsqu'elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire discrète X est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par leurs probabilités. Compte tenu de cette remarque, on retiendra en particulier que si les valeurs prises par X sont comprises entre deux réels a et b, ce sera aussi le cas de l'espérance de X.

b. On rappelle que, si la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente, alors on ne modifie ni la nature, ni la valeur de la somme de la série, en modifiant l'ordre de sommation. En revanche, lorsque la série $\sum u_n$ n'est que semi-convergente, il est possible de modifier la nature ou la valeur de la somme de la série en modifiant l'ordre des termes. C'est pour cette raison que l'on impose une absolue convergence dans la définition de l'espérance.

c. Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, l'espérance de X existe toujours.

Théorème 32.13 ▶ Théorème de transfert

Soit φ une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

i. Si $X(\Omega)$ est fini, alors $\varphi(X)$ admet une espérance.

ii. Si $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ est infini, alors $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \varphi(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente.

iii. Si $\varphi(X)$ admet une espérance, alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Remarques

a. Il en découle de manière immédiate que X admet une espérance si et seulement si $|X|$ admet une espérance.

b. Attention, l'existence de l'espérance de X n'implique pas en général celle de l'espérance de $\varphi(X)$, et réciproquement.

Exercice 32.4 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 26.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X^2.

Théorème 32.14

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors :

i. si X est positive : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ (**positivité de l'espérance**),

ii. pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b \quad (\textbf{linéarité de l'espérance})$$

Preuve

i. On suppose que X est une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x)$$

et donc, comme $x\, \mathbb{P}(X = x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$ (puisque $X(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$ par hypothèse) :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant 0$$

ii. On suppose que X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme X est une variable aléatoire discrète et comme $t \mapsto at + b$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème 32.13, si X est une variable aléatoire finie, alors $aX + b$ admet une espérance et, si X est discrète infinie et $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, alors $aX + b$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum (ax_n + b)\, \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.

Or, comme X admet une espérance, la série $\sum x_n\, \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. De plus, d'après 32.8, la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (absolument puisque ses termes sont tous positifs). On en déduit que la série $\sum (ax_n + b)\, \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente, donc $aX + b$ admet une espérance.

Enfin, dans tous les cas, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + b) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b)\, \mathbb{P}(X = x) \\
&= a \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \\
&= a\, \mathbb{E}(X) + b
\end{aligned}$$

□

Définition 32.15

On dit qu'une variable aléatoire X est centrée si elle admet une espérance et si : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Remarque En particulier, pour toute variable aléatoire X admettant une espérance, la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.

B.2. Moments d'une variable aléatoire discrète

Les notions introduites dans ce paragraphe ne sont pas au programme. Elles ne sont présentées ici que parce qu'il s'agit de

Définition 32.16

Soit r un entier naturel non nul. On dit que X admet un **moment d'ordre r**, noté $m_r(X)$, si X^r admet une espérance et, dans ce cas, on note :

$$m_r(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^r\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Proposition 32.17

Soit r un entier naturel non nul. Si X admet un moment d'ordre r, alors, pour tout $p \in [\![1, r]\!]$, X admet un moment d'ordre p.

Remarques

a. Ce résultat n'est utile et utilisé en général que dans le cas où $r = 2$. Le cas général n'est pas réellement au programme et il peut donc être utile de savoir le démontrer.

b. En particulier, si X n'admet pas d'espérance, elle n'admet de moment à aucun ordre $r \geqslant 1$.

B.3. Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 32.18

On dit que X admet une **variance** si X admet une espérance et si $X - \mathbb{E}(X)$ admet d'un moment d'ordre 2. Dans ce cas, la variance est notée $\mathbb{V}(X)$ et définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2 \ \mathbb{P}(X=x)$$

Remarques

a. De même que pour l'espérance, il est important de retenir qu'une variable aléatoire peut ne pas admettre de variance et qu'il est donc fondamental d'en prouver l'existence avant d'envisager de la calculer.

b. Se souvenir que, compte tenu de la définition, une variance (quand elle existe), est toujours positive ou nulle.

c. Il est rare que la définition soit utile. En général, pour pour montrer l'existence et calculer la variance d'une variable aléatoire, on utilise la proposition suivante :

Proposition 32.19 ▶ Formule de Kœnig-Huygens

X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2 et, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Preuve

On peut déjà remarquer que, si X admet une variance, alors X admet une espérance par définition et que, d'après 32.17, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance. On peut donc supposer que X admet une espérance. De plus, on remarque que, si X est une variable aléatoire discrète finie, X^2 et $(X-\mathbb{E}(X))^2$ sont des variables aléatoires discrètes finies, donc admettent une espérance. Ainsi on peut se contente de traiter le cas où X est discrète infinie pour la question de l'existence.
On suppose, pour la question de l'existence, que $X(\Omega) = \{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ (x_n-\mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X=x_n) = x_n^2\,\mathbb{P}(X=x_n) - 2\,\mathbb{E}(X)\,x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)&\\ +[\mathbb{E}(X)]^2\,\mathbb{P}(X=x_n)&\end{aligned} \tag{32.2}$$

et donc, de manière équivalente :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ x_n^2\,\mathbb{P}(X=x_n) = (x_n-\mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X=x_n)&\\ +2\,\mathbb{E}(X)\,x_n\,\mathbb{P}(X=x_n) - [\mathbb{E}(X)]^2\,\mathbb{P}(X=x_n)&\end{aligned} \tag{32.3}$$

De plus, comme X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, les séries $\sum \mathbb{P}(X=x_n)$ et $\sum x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)$ sont convergentes, donc, d'après (32.2) et (32.3), les séries $\sum (x_n-\mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X=x_n)$ et $\sum x_n^2\,\mathbb{P}(X=x_n)$ sont de même nature. Finalement, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.
Enfin, si X admet une variance, on a alors, grâce aux remarques précédentes :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X=x)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x^2 - 2x\,\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2\right)\ \mathbb{P}(X=x)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbb{P}(X=x) - 2\,\mathbb{E}(X) \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) + [\mathbb{E}(X)]^2 \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2\\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\end{aligned}$$

□

Exercice 32.5 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 16.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la variance de X.

Définition 32.20

Si X admet une variance, on appelle **écart-type** de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarques

a. La variance étant la moyenne du carré de la distance entre les valeurs prises par X et $\mathbb{E}(X)$, on peut en quelque sorte dire que l'écart-type permet de « corriger la présence du carré » pour mesurer la dispersion des valeurs prises par X par rapport à sa moyenne.

En particulier, on remarquera que, plus cet écart-type est grand, plus, en moyenne, X prend des valeurs éloignées de son espérance. Inversement, plus l'écart-type est proche de 0, plus X prend des valeurs proches de son espérance.

b. Il existe d'autres façons de mesurer la dispersion des valeurs prises par X lorsqu'elle admet une espérance. On pourrait également s'intéresser à l'espérance de $|X - \mathbb{E}(X)|$ (ce qui pourrait paraître être un choix plus naturel), mais cette mesure est souvent moins pratique que la variance dans les calculs.

Proposition 32.21

Si X admet une variance, alors :

$$\mathbb{V}(X) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} \ / \ \mathbb{P}(X = a) = 1$$

Preuve Supposons tout d'abord qu'il existe un réel a tel que : $\mathbb{P}(X = a) = 1$. On a alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \ / \ x \neq a,\ \mathbb{P}(X = x) = 0$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{P}(X = a) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = (a - \mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X = a) = 0$$

Réciproquement, supposons que X soit une variable aléatoire discrète de variance nulle. On a alors :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X = x) = 0$$

et donc, les termes de la somme étant positifs ou nuls :

$$\forall x \in X(\Omega),\ 0 \leqslant (x - \mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X = x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X = x)$$

d'où :

$$\forall x \in X(\Omega),\ (x - \mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X = x) = 0$$

et donc, en posant $a = \mathbb{E}(X)$:

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) \neq 0 \Rightarrow x = a$$

Finalement, d'après 32.8, on a alors :

$$\mathbb{P}(X = a) = 1$$

□

Proposition 32.22

Si X est une variable aléatoire admettant une variance, alors, pour tout couple (a,b) de réels, $aX+b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\;\sigma(X)$$

Preuve On suppose que X est une variable aléatoire discrète admettant une variance et on considère un couple (a,b) de réels. D'après 32.19, $aX+b$ admet une variance si et seulement si $(aX+b)^2$ admet une espérance donc, d'après le théorème de transfert, si et seulement si, en notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (le cas où $X(\Omega)$ est fini ne posant pas de problème pour l'existence des variances), la série $\sum (ax_n+b)^2\,\mathbb{P}(X=x_n)$ converge absolument (cette dernière précision étant inutile ici puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs). De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (ax_n+b)^2\,\mathbb{P}(X=x_n) = a^2x_n^2\,\mathbb{P}(X=x_n) + 2abx_n\,\mathbb{P}(X=x_n) + b^2\,\mathbb{P}(X=x_n).$$

Or, comme X admet une variance, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ existent d'après 32.19, donc les séries $\sum x_n^2\,\mathbb{P}(X=x_n)$, $\sum x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)$ et $\sum \mathbb{P}(X=x_n)$. Ainsi, la série $\sum (ax_n+b)^2\,\mathbb{P}(X=x_n)$ converge, donc $aX+b$ admet un moment d'ordre 2, ce qui prouve que $aX+b$ admet une variance.
Enfin, on a, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (ax+b)^2\,\mathbb{P}(X=x)\\
&= a^2 \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbb{P}(X=x) + 2ab \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) + b^2 \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\\
&= a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2
\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens et par linéarité de l'espérance, on a finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) - [\mathbb{E}(aX+b)]^2\\
&= \left[a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right] - [a\,\mathbb{E}(X)+b]^2\\
&= \left[a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right] - \left[a^2\,[\mathbb{E}(X)]^2 + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right]\\
&= a^2\left(\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\right)\\
&= a^2\,\mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

On obtient alors de manière immédiate, une variance étant toujours positive :

$$\begin{aligned}
\sigma(aX+b) &= \sqrt{\mathbb{V}(aX+b)}\\
&= \sqrt{a^2\,\mathbb{V}(X)}\\
&= |a|\;\sqrt{\mathbb{V}(X)}\\
&= |a|\;\sigma(X)
\end{aligned}$$

□

Définition 32.23

On dit qu'une variable aléatoire X est réduite si elle admet une variance et si : $\mathbb{V}(X) = 1$.

Remarques

a. En particulier, pour toute variable aléatoire X admettant une variance non nulle, la variable aléatoire $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire réduite.

b. Pour toute variable aléatoire X admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X**.

C. Lois discrètes finies usuelles

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies.

C.1. Variable aléatoire constante

Définition 32.24

Une variable aléatoire X est dite constante (ou certaine) s'il existe un réel a tel que : $X(\Omega) = \{a\}$.

Remarques

a. En particulier, si X est une variable aléatoire constante égale à a, alors : $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

b. Si X est une variable aléatoire et s'il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$, X peut prendre d'autres valeurs que a, mais obligatoirement avec probabilité nulle. Dans ce cas, on dit que X est une variable aléatoire presque sûrement constante (ou quasi-certaine)..

Théorème 32.25

Si $a \in \mathbb{R}$ et si X est une variable aléatoire certaine égale à a, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0$$

Preuve Si X est la variable aléatoire certaine égale à a, elle est discrète finie, donc admet une espérance et une variance. De plus, comme $X(\Omega) = \{a\}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{P}(X = a) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = a^2\,\mathbb{P}(X = a) = a^2$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = a, \quad \mathbb{E}(X^2) = a^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = a^2 - a^2 = 0$$

□

C.2. Loi de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, appelées *succès* ou *échec*. Une telle épreuve est appelée **épreuve de Bernoulli**. La variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.
Par exemple, si l'expérience consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant 10 boules, dont 3 boules blanches et 7 boules noires et si l'on suppose que chaque boule a la même probabilité d'être tirée, la variable aléatoire X prenant la valeur 1 si l'on obtient une boule blanche et 0 sinon est une variable aléatoire de Bernoulli et, chaque boule de l'urne ayant la même probabilité d'être tirée :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{7}{10} = 1 - \frac{3}{10}$$

Définition 32.26

Si p est un élément de $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre $\boldsymbol{p}$** si X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Remarques

a. La loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ est notée $\mathcal{B}(p)$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

c. Il arrive que l'on étende cette définition aux cas $p = 0$ et $p = 1$. Si $p = 0$, une variable aléatoire de Bernoulli est alors une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 0, tandis que, si $p = 1$, une variable aléatoire de Bernoulli est alors une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 1.

Proposition 32.27

Si A est un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A est une variable aléatoire et suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Preuve Soit A un élément de $\mathcal{A}$. Par définition, $\mathbb{1}_A$ est une application de Ω dans $\{0,1\}$ et :

$$[\mathbb{1}_A = 0] = \overline{A} \quad \text{et} \quad [\mathbb{1}_A = 1] = A$$

donc, comme A et $\overline{A}$ appartiennent à $\mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète. Comme elle prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, elle suit donc une loi de Bernoulli et on a :

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

□

Proposition 32.28

Si $p \in]0,1[$ et si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p\,(1-p)$$

Preuve Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, X est une variable aléatoire discrète finie, elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) = p$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

□

C.3. Loi binomiale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et p est un réel appartenant à $]0,1[$.
On considère une expérience aléatoire consistant à répéter n épreuves indépendantes et identiques de Bernoulli. La loi de la variable aléatoire égale au nombre de succès dans cette suite d'épreuves est dite binomiale.
Par exemple, si l'expérience consiste à tirer successivement, au hasard et *avec* remise, n boules dans une urne contenant une proportion p de boules blanches, la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues suit une loi binomiale.
Elle prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, si $k \in [\![0,n]\!]$, l'événement $[X=k]$ se réalise si et seulement si exactement k boules tirées sont blanches et les $n-k$ autres sont noires.
De plus, les tirages s'effectuent au hasard et avec remise, donc les tirages sont mutuellement indépendants et, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est p et celle d'obtenir une boule noire est $1-p$. Si l'on fixe les k tirages auxquels ont souhaite obtenir une boule blanche, la probabilité d'obtenir une boule blanche à chacun de ces k tirages et une boule noire à chacun des $n-k$ autres est $p^k(1-p)^{n-k}$.
Comme cette probabilité est de dépend pas des numéros de tirage où l'on obtient une boule blanche et comme il y a $\binom{n}{k}$ choix des tirages donnant une boule noire, on a donc :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Définition 32.29

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarques

a. La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

c. On peut remarquer que la loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Proposition 32.30

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np\,(1-p)$$

Exercice 32.6 Démontrer la proposition 32.30.

Remarque Il est intéressant de retenir la méthode utilisée dans la preuve, consistant à remarquer que $k^2 = k(k-1) + 1$, car elle sera utile dans un grand nombre de situations pour les calculs de moments d'ordre 2.

C.4. Loi uniforme

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une expérience aléatoire consistant à tirer une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Comme le tirage se fait au hasard, la probabilité est uniforme. Par analogie, on dira donc que la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule tirée est uniforme. Elle prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Définition 32.31

On dit que X suit la **loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$** si X prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Plus généralement, si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a < b$, on dit que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ si X prend ses valeurs dans $[\![a, b]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![a, b]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$$

Remarques

a. La loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ est notée $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

Proposition 32.32

Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Exercice 32.7 Démontrer la proposition 32.32.

Proposition 32.33

Soit (a, b) un couple d'entiers relatifs tel que : $a < b$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!]) \iff X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$$

Preuve On peut remarquer que :

$$\forall k \in \mathbb{R},\ [X = k] = [X - a + 1 = k - a + 1] \tag{32.4}$$

Supposons maintenant que X suive la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Alors X prend ses valeurs dans $[\![a, b]\!]$, donc $X - a + 1$ prend ses valeurs dans $[\![1, b - a + 1]\!]$. De plus, on a :

$$\forall k \in [\![1, b - a + 1]\!]\,,\ \mathbb{P}(X - a + 1 = k) = \mathbb{P}(X = k + a - 1)$$

et comme $k + a - 1$ appartient à $[\![a, b]\!]$ si k appartient à $[\![1, b - a + 1]\!]$:

$$\forall k \in [\![1, b - a + 1]\!]\,,\ \mathbb{P}(X - a + 1 = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

donc $X - a + 1$ suit la loi uniforme sur $[\![1, b - a + 1]\!]$.
Réciproquement, supposons que $X - a + 1$ suive la loi uniforme sur $[\![1, b - a + 1]\!]$. De même, X prend alors ses valeurs dans $[\![a, b]\!]$ et :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![a, b]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X - a + 1 = k - a + 1)\\ &= \frac{1}{b - a + 1}\end{aligned}$$

donc X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

□

Proposition 32.34

Soit (a, b) un couple d'entiers relatifs tel que : $a < b$. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$$

Preuve Si X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, alors X est une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet une espérance et une variance. De plus, en posant $Y = X - a + 1$, on a, d'après 32.14 et 32.22 :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - a + 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)$$

d'où :

$$\mathbb{E}(X) = a - 1 + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$$

et donc, comme Y suit la loi uniforme sur $[\![1, b - a + 1]\!]$:

$$\mathbb{E}(X) = a - 1 + \frac{b - a + 2}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}.$$

□

D. Lois discrètes infinies usuelles

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires sont définies.

D.1. Loi géométrique

Dans cette sous-partie, p est un élément de $]0, 1[$.
On considère une expérience aléatoire consistant à effectuer une suite d'épreuves de Bernoulli, indépendantes et identiques, jusqu'à l'obtention d'un succès. La loi de la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves réalisées dans cette suite est dite géométrique.
Par exemple, si l'expérience consiste à tirer successivement, au hasard et *avec* remise une boule dans une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1 - p$ de boules noires, la variable aléatoire X prenant la valeur $k \geqslant 1$ si la première boule blanche apparaît à l'issue du $k^{ème}$ tirage et prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de boule blanche dans la suite de tirages est une variable aléatoire géométrique.

Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et, si $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X = k]$ se réalise si et seulement si on obtient une boule noire à chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage. Or, les tirages se faisant au hasard et avec remise, ils sont mutuellement indépendants et, à chaque tirage, la probabilité de tirer une boule blanche est p et celle de tirer une boule noire est $1-p$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

Par ailleurs, en notant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'événement « obtenir une boule noire au $k^{\text{ème}}$ tirage », on a :

$$[X = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} N_k$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right)$$

et alors, comme les tirages sont mutuellement indépendants et donnent tous une boule noire avec la même probabilité $1-p$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n$$

et donc, comme $|1-p| < 1$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.$$

Ainsi, X prend presque sûrement une valeur appartenant à $\mathbb{N}^*$ puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et que :

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1$$

Définition 32.35

On dit que X suit la **loi géométrique de paramètre p** si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

Remarques

a. La loi géométrique de paramètre p est notée $\mathcal{G}(p)$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

c. Il arrive que l'on considère que, si X suit une loi géométrique, alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (ce qui est d'ailleurs fait plus loin dans le tableau récapitulatif). Dans ce cas, il sera donc important de bien faire attention à la formulation et aux consignes de l'énoncé. Parfois, on considère que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ ou $\mathbb{N}$, en attribuant la valeur $+\infty$ ou 0 à l'éventualité ou il n'y a jamais de succès.

Proposition 32.36

Si X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 32.8 Démontrer la proposition 32.36.

D.2. Loi de Poisson

Définition 32.37

On dit que X suit la **loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda > 0}$** si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarques

a. L'exercice 26.2 permet de justifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

b. La loi de Poisson de paramètre λ est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

c. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

d. Il n'y a pas de modèle simple associé à la loi de Poisson. Le lecteur curieux acceptera que l'on rencontre cette loi surtout dans l'étude d'événements « rares », par exemple le nombre de passage de voitures à un péage dans un intervalle de temps donné, le nombre de clients à la poste sur une journée...

Proposition 32.38

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Exercice 32.9 Démontrer la proposition 32.38.

E. Loi et espérance conditionnelles

E.1. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire

Définition 32.39

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. La loi de X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est appelée **loi conditionnelle** de X sachant l'événement A.
Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A, c'est donc calculer, pour chaque valeur x de $X(\Omega)$, la probabilité

$$\mathbb{P}_A(X = x) = \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarques

a. De même que les probabilités conditionnelles, les lois conditionnelles sont souvent utiles pour simplifier les calculs (recherche de loi, d'espérance,...).

b. Attention ! De même que les probabilités conditionnelles, il faut prendre garde à ne pas parler de « la variable aléatoire X sachant A », car cela n'a aucun sens : c'est la loi qui est conditionnelle, pas la variable aléatoire. Pour éviter les confusions, on pourra donc écrire « la loi conditionnelle sachant l'événement A de la variable aléatoire X est... » ou encore « sachant A, la loi de X est... »

Définition 32.40

Si A est un événement de probabilité non nulle, on dit que X admet une **espérance conditionnelle sachant A** (ou une espérance pour la probabilité $\mathbb{P}_A$) si $X(\Omega)$ est fini ou si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est infini et si la série $\sum x_i \, \mathbb{P}_A(X = x_i)$ est absolument convergente.
Dans le cas où elle existe, cette espérance conditionnelle est notée $\mathbb{E}(X \mid A)$ et définie par :

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}_A(X = x)$$

F. Correction des exercices

Correction de l'exercice 32-1

Comme on effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée, il est naturel d'envisager l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{P, F\}^3$, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On peut déjà remarquer que X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ donc, comme $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, X est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Par ailleurs, le nombre de « face » obtenus en trois lancers est nécessairement un nombre entier de $\{0,1,2,3\}$ donc X prend ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$. Déterminer la loi de X revient alors à calculer les probabilités $\mathbb{P}(X=k)$ lorsque $k \in [\![0,3]\!]$.
Enfin, on peut remarquer que :

$$[X=0]=\{(P,P,P)\}, \quad [X=1]=\{(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F)\}$$
$$[X=2]=\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\} \quad \text{et} \quad [X=3]=\{(F,F,F)\}$$

et donc, comme la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{8}$$

Ainsi, la loi de X est caractérisée par la donnée du tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Correction de l'exercice 32-2

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et, comme la série exponentielle $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge, de somme e^{λ}, la série $\sum p_n$ converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} \\ &= 1\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le germe d'une loi de probabilité. On verra plus tard que cette loi est appelée loi de Poisson de paramètre λ.

Correction de l'exercice 32-3

X est une variable aléatoire discrète finie (elle prend ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$), donc elle admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X)=0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)+2\times\mathbb{P}(X=2)+3\times\mathbb{P}(X=3)$$

et donc, d'après les calculs effectués dans l'exercice 26.1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-4

X est une variable aléatoire discrète finie et $\varphi : t \mapsto t^2$ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, donc, d'après 32.13, X^2 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^2)=0^2\times\mathbb{P}(X=0)+1^2\times\mathbb{P}(X=1)+2^2\times\mathbb{P}(X=2)+3^2\times\mathbb{P}(X=3)$$

et donc, d'après les calculs effectués dans l'exercice 26.1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8} \\ &= 3\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-5

X est une variable aléatoire discrète finie donc X admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2$$

et donc, d'après les calculs effectués dans les exercices 26.3 et 26.4 :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= 3-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-6

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, X est une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k}\\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k} p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}\\
&= np\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k} p^{k}(1-p)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

et finalement, d'après la formule du binôme de Newton et comme $p+(1-p)=1$:

$$\mathbb{E}(X) = np$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}[k(k-1)+k]\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc, si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} p^k(1-p)^{n-k} + \mathbb{E}(X)\\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} p^{k+2}(1-p)^{n-2-k} + np\\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} p^{k}(1-p)^{n-2-k} + np\\
&= n(n-1)p^2 + np\\
&= np(np-p+1)
\end{aligned}$$

et alors, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\\
&= np(np-p+1) - (np)^2\\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-7

Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, X est une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbb{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n+1)(4n+2)-(n+1)(3n+3)}{12}\\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12}\\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-8

On suppose que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. X prend alors ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\,\mathbb{P}(X=n)=n(1-p)^{n-1}p$$

Or, comme $|1-p|<1$, la série géométrique dérivée $\sum n(1-p)^{n-1}$ est absolument convergente, donc la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente. X admet donc une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}\\ &= p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}\\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n^2\,\mathbb{P}(X=n) &= n^2(1-p)^{n-1}p\\ &= n(n-1)(1-p)^{n-2}(1-p)p+n(1-p)^{n-1}p\end{aligned}$$

Or, comme $|1-p|<1$, les séries géométriques dérivées $\sum n(1-p)^{n-1}$ et $\sum n(n-1)(1-p)^{n-2}$ sont absolument convergentes, donc la série $\sum n^2\,\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente. X^2 admet donc une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,\mathbb{P}(X=n)\\
&= p(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}\\
&= p(1-p)\times\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}\\
&= \frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p}\\
&= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que X admet une variance et que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2\\
&= \frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32-9

On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. X prend alors ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\,\mathbb{P}(X=n) &= n\times \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

De plus, on sait que la série exponentielle $\sum\frac{\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente, de somme e^{λ}, donc la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente. X admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)\\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!}\\
&= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}\\
&= \lambda
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n\geqslant 2,\ n^2\,\mathbb{P}(X=n) &= n(n-1)\times\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}+n\times\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

On en déduit de même que précédemment que la série $\sum n^2\,\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente. X^2 admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,\mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\times \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\times \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!} + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!} \\
&= \lambda^2+\lambda
\end{aligned}$$

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

G. Tableau récapitulatif des lois discrètes usuelles

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul, p un élément de $]0,1[$, $q=1-p$ et λ est un réel strictement positif.

Loi	$\boldsymbol{X(\Omega)}$	$\mathbb{P}(\boldsymbol{X=k})$	**Espérance**	**Variance**
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\begin{cases}\mathbb{P}(X=1)=p\\ \mathbb{P}(X=0)=1-p\end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Uniforme $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$	$[\![a,b]\!]$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Sommaire