31 Variables aléatoires finies

ECG Maths Appliquées
Semestre 1

Quand on étudie un phénomène aléatoire, il arrive fréquemment que l'on soit conduit à étudier des grandeurs numériques associées à cette expérience (gain à une loterie, nombre de « face » obtenus dans une suite de lancers de pièce,). C'est dans ce cadre que l'on est en général amené à définir une variable aléatoire : en termes simples, une variable aléatoire réelle sera une application X qui, à une résultat ω de l'expérience, fait correspondre un nombre réel $X(\omega)$.
Considérons par exemple le jeu suivant : on lance une pièce équilibrée 10 fois et un joueur parie sur le nombre de « face » apparaissant. Il peut être intéressant, avant de parier, de déterminer quel nombre a le plus de chance d'apparaître.
Le nombre de « face » obtenu étant fonction du résultat de l'expérience, on peut modéliser l'expérience en posant :

$$\Omega = \{P, F\}^{10} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega)$$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (puisque la pièce est supposée équilibrée). On peut également définir l'application X qui à un résultat associe le nombre de « face » obtenus. On cherche, pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement « X prend la valeur k », c'est-à-dire, en pratique, de l'événement :

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = k\}$$

Pour simplifier, cet événement sera noté $\{X = k\}$ ou $[X = k]$.
On peut remarquer qu'il y a 2^{10} suites de 10 lancers possibles (2 résultats possibles à chacun des 10 lancers), toutes équiprobables et que, parmi celles-ci $\binom{10}{k}$ mènent à la réalisation de l'événement $[X = k]$ (autant que de choix des k lancers donnant « face », les $10 - k$ autres donnant alors nécessairement « pile »), on a donc :

$$\forall k \in [\![1, 10]\!], \ \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$$

Dès lors, pour répondre à la question initiale, on est conduit à étudier les variations de la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{0 \leqslant k \leqslant 10}$. Or cette suite est strictement positive et, pour $k \in [\![0, 9]\!]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X = k+1])}{\mathbb{P}([X = k])} &= \frac{\binom{10}{k+1}}{\binom{10}{k}} \\ &= \frac{10 - k}{k + 1} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X = k+1])}{\mathbb{P}([X = k])} > 1 &\iff \frac{10 - k}{k + 1} > 1 \\ &\iff 10 - k > k + 1 \\ &\iff k < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \mathbb{P}([X = 0]) < \mathbb{P}([X = 1]) < \mathbb{P}([X = 2]) < \mathbb{P}([X = 3]) < \mathbb{P}([X = 4]) < \mathbb{P}([X = 5]) \\ \mathbb{P}([X = 5]) > \mathbb{P}([X = 6]) > \mathbb{P}([X = 7]) > \mathbb{P}([X = 8]) > \mathbb{P}([X = 9]) > \mathbb{P}([X = 10]) \end{cases}$$

Si le joueur veut avoir la plus grande probabilité de gagner, il a donc intérêt à parier qu'il y aura 5 « face » (ce que certains auraient sans doute deviné intuitivement... mais qui n'est plus vrai si la pièce est truquée).
L'objectif de ce chapitre est de se donner quelques outils pour étudier le comportement de ces grandeurs réelles régies par des phénomènes aléatoires.

A. Généralités

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ensemble fini non vide et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

A.1. Définition

Définition 31.1

On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est appelé **ensemble image**, ou univers image, de X.

Notation 31.2

Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et si a et b sont deux réels tels que $a < b$, $X^{-1}(\{a\})$, $X^{-1}(]-\infty, a])$, $X^{-1}([a, b])$, $X^{-1}(]a, b])$, $X^{-1}(]a, b[)$, $X^{-1}([b, +\infty[)$ et $X^{-1}(]b, +\infty[), \ldots$ sont donc des événements, et l'on adopte les notations suivantes :

i. $[X = a]$ désigne l'événement $X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$,
ii. $[X \leqslant a]$ désigne l'événement $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant a\}$,
iii. $[a \leqslant X \leqslant b]$ désigne l'événement $X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$,
iv. ...

Exemple 31.1 Si on effectue une suite de 4 lancers indépendants d'une pièce équilibrée et si on note $\Omega = \{P, F\}^4$ et $\mathcal{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega)$, alors l'application X qui à tout élément ω de Ω associe le nombre de « pile » obtenus dans la suite de résultats ω est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
De plus, $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$ est fini, donc X est une variable aléatoire discrète finie.
Dans cet exemple, on a donc, par exemple :

$$[X = 3] = \{(P, P, P, F), (P, P, F, P), (P, F, P, P), (F, P, P, P)\}$$

et :

$$[X < 2] = \{(F, F, F, F), (P, F, F, F), (F, P, F, F), (F, F, P, F), (F, F, F, P)\}$$

Remarques

a. Attention au vocabulaire : si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, X est donc une application, Ω est son ensemble de définition et $X(\Omega)$ est son **ensemble image** (aussi appelé ensemble des valeurs prises par X). On se gardera donc de parler d'un obscur « univers de X », qui n'a pas de sens.

b. On rappelle que l'écriture $X^{-1}(\{k\})$ ne signifie pas que X est bijective (ce qui est rarissime pour une variable aléatoire) : il s'agit d'une notation pour parler de l'ensemble des antécédents de k par X, *i.e.* de l'image réciproque de k par X.

c. Si X est une variable aléatoire et s'il existe un réel a tel que $X(\Omega) = \{a\}$, on dit que X est une **variable aléatoire constante** (ou certaine) égale à a.

A.2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé tel que Ω soit un ensemble fini et X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Définition 31.3

Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, c'est déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ et, pour tout réel x appartenant à $X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.

Exercice 31.1 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. Déterminer la loi de X.

Remarques

a. Attention, deux variables aléatoires peuvent suivre la même loi sans être égales : par exemple, si on effectue un unique lancer d'une pièce équilibrée et que l'on note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale à 1 si on a obtenu « pile » (resp. « face ») et à 0 sinon, X et Y suivent la même loi, mais ne sont pas égales puisque, quand l'une est égale à 1, l'autre est égale à 0. On a même : $Y = 1 - X$.

b. L'ensemble $S(X) = \{x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$ est appelé **support** de X (terme hors programme).

A.3. Système complet associé à une variable aléatoire finie

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ désigne un espace probabilisable tel que Ω soit fini et X une variable aléatoire.

Proposition 31.4

Si X est une variable aléatoire discrète, la famille $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événement, appelé **système complet d'événements associé** à X.

Preuve Comme X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, les événements de l'ensemble $\{[X = x],\ x \in X(\Omega)\}$ sont deux à deux incompatibles, non impossibles et, par définition, on a :

$$\begin{aligned}\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X = x] &= \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\} \\ &= \Omega\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

A.4. Fonction d'une variable aléatoire finie

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire.

Théorème 31.5

Si φ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $\varphi \circ X$, aussi notée $\varphi(X)$, est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exemple 31.2 Si X est une variable aléatoire alors, pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$, X^2, $\mathrm{e}^X, \ldots$ sont des variables aléatoires.

Proposition 31.6

Si φ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors la loi de $Y = g(X)$ est donnée par :

$$Y(\Omega) = \{g(x),\ x \in X(\Omega)\} \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}(X = x)$$

B. Moments d'une variable aléatoire discrète

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ (Ω étant un ensemble fini) sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies.

B.1. Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 31.7

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (où n est un entier naturel non nul), on appelle **espérance de X** le réel noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exercice 31.2 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 26.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

Remarque L'espérance d'une variable aléatoire finie X est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par leurs probabilités. Compte tenu de cette remarque, on retiendra en particulier que si les valeurs prises par X sont comprises entre deux réels a et b, ce sera aussi le cas de l'espérance de X.

Théorème 31.8 ► Théorème de transfert

Soit φ une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. $\varphi(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \, \mathbb{P}(X = x)$$

Exercice 31.3 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 26.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X^2.

Théorème 31.9

Si X est une variable aléatoire finie alors :

i. si X est positive : $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ (**positivité de l'espérance**),

ii. pour tout couple (a, b) de réels, on a :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b \quad \textbf{(linéarité de l'espérance)}$$

Preuve

i. On suppose que X est une variable aléatoire finie positive. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

et donc, comme $x \, \mathbb{P}(X = x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$ (puisque $X(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$ par hypothèse) :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant 0$$

ii. On suppose que X est une variable aléatoire finie. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Comme X est une variable aléatoire finie et comme $t \mapsto at+b$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème 31.8, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX+b) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (ax+b)\,\mathbb{P}(X=x)\\ &= a\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) + \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\\ &= a\,\mathbb{E}(X)+b\end{aligned}$$

□

B.2. Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 31.10

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **variance** de X le réel noté $\mathbb{V}(X)$ défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\ \mathbb{P}(X=x)$$

Remarques

a. Se souvenir que, compte tenu de la définition, une variance, est toujours positive ou nulle.

b. Il est rare que la définition soit utile. En général, pour pour montrer l'existence et calculer la variance d'une variable aléatoire, on utilise la proposition suivante :

Proposition 31.11 ▶ Formule de Kœnig-Huygens

Si X est une variable aléatoire finie, alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Exercice 31.4 On effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus. On a déterminé la loi de X dans l'exercice 16.1. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la variance de X.

Définition 31.12

Si X est une variable aléatoire finie, on appelle **écart-type** de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarques

a. La variance étant la moyenne du carré de la distance entre les valeurs prises par X et $\mathbb{E}(X)$, on peut en quelque sorte dire que l'écart-type permet de « corriger la présence du carré » pour mesurer la dispersion des valeurs prises par X par rapport à sa moyenne.

En particulier, on remarquera que, plus cet écart-type est grand, plus, en moyenne, X prend des valeurs éloignées de son espérance. Inversement, plus l'écart-type est proche de 0, plus X prend des valeurs proches de son espérance.

b. Il existe d'autres façons de mesurer la dispersion des valeurs prises par X lorsqu'elle admet une espérance. On pourrait également s'intéresser à l'espérance de $|X-\mathbb{E}(X)|$ (ce qui pourrait paraître être un choix plus naturel), mais cette mesure est souvent moins pratique que la variance dans les calculs.

Proposition 31.13

Si X est une variable aléatoire finie, alors, pour tout couple (a, b) de réels :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\ \sigma(X)$$

Preuve On suppose que X est une variable aléatoire finie et on considère un couple (a, b) de réels. D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) - [\mathbb{E}(aX+b)]^2$$

On sait de plus, d'après le théorème de transfert, que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (ax+b)^2\,\mathbb{P}(X=x)\\
&= a^2 \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbb{P}(X=x) + 2ab \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) + b^2 \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\\
&= a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2
\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens et par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= \left[a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right] - [a\,\mathbb{E}(X)+b]^2\\
&= \left[a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right] - \left[a^2\,[\mathbb{E}(X)]^2 + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2\right]\\
&= a^2\left(\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\right)\\
&= a^2\,\mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

On obtient alors de manière immédiate, une variance étant toujours positive :

$$\begin{aligned}
\sigma(aX+b) &= \sqrt{\mathbb{V}(aX+b)}\\
&= \sqrt{a^2\,\mathbb{V}(X)}\\
&= |a|\ \sqrt{\mathbb{V}(X)}\\
&= |a|\ \sigma(X)
\end{aligned}$$

□

C. Lois discrètes finies usuelles

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires envisagées sont définies.

C.1. Variable aléatoire constante

Définition 31.14

Une variable aléatoire X est dite constante (ou certaine) s'il existe un réel a tel que : $X(\Omega) = \{a\}$.

Remarque En particulier, si X est une variable aléatoire constante égale à a, alors : $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

Théorème 31.15

Si $a \in \mathbb{R}$ et si X est une variable aléatoire certaine égale à a, alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0$$

Preuve Si X est la variable aléatoire certaine égale à a, elle est discrète finie, donc admet une espérance et une variance. De plus, comme $X(\Omega) = \{a\}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{P}(X = a) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = a^2\,\mathbb{P}(X = a) = a^2$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = a, \quad \mathbb{E}(X^2) = a^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = a^2 - a^2 = 0$$

□

C.2. Loi de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, appelées *succès* ou *échec*. Une telle épreuve est appelée **épreuve de Bernoulli**. La variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.
Par exemple, si l'expérience consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant 10 boules, dont 3 boules blanches et 7 boules noires et si l'on suppose que chaque boule a la même probabilité d'être tirée, la variable aléatoire X prenant la valeur 1 si l'on obtient une boule blanche et 0 sinon est une variable aléatoire de Bernoulli et, chaque boule de l'urne ayant la même probabilité d'être tirée :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{7}{10} = 1 - \frac{3}{10}$$

Définition 31.16

Si p est un élément de $]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre $\boldsymbol{p}$** si X prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Remarques

a. La loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ est notée $\mathcal{B}(p)$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Proposition 31.17

Si $p \in]0,1[$ et si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p\,(1 - p)$$

Preuve Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, X est une variable aléatoire discrète finie, elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) = p$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

□

C.3. Loi binomiale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et p est un réel appartenant à $]0,1[$.
On considère une expérience aléatoire consistant à répéter n épreuves indépendantes et identiques de Bernoulli. La loi de la variable aléatoire égale au nombre de succès dans cette suite d'épreuves est dite binomiale.
Par exemple, si l'expérience consiste à tirer successivement, au hasard et *avec* remise, n boules dans une urne contenant une proportion p de boules blanches, la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues suit une loi binomiale.
Elle prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, si $k \in [\![0,n]\!]$, l'événement $[X = k]$ se réalise si et seulement si exactement k boules tirées sont blanches et les $n - k$ autres sont noires.
De plus, les tirages s'effectuent au hasard et avec remise, donc les tirages sont mutuellement indépendants et, à

chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est p et celle d'obtenir une boule noire est $1-p$. Si l'on fixe les k tirages auxquels ont souhaite obtenir une boule blanche, la probabilité d'obtenir une boule blanche à chacun de ces k tirages et une boule noire à chacun des $n-k$ autres est $p^k(1-p)^{n-k}$.
Comme cette probabilité est de dépend pas des numéros de tirage où l'on obtient une boule blanche et comme il y a $\binom{n}{k}$ choix des tirages donnant une boule noire, on a donc :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Définition 31.18

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Remarques

a. La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

c. On peut remarquer que la loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Proposition 31.19

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X)=np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X)=np\,(1-p)$$

Exercice 31.5 Démontrer la proposition 31.19.

Remarque Il est intéressant de retenir la méthode utilisée dans la preuve, consistant à remarquer que $k^2=k(k-1)+1$, car elle sera utile dans un grand nombre de situations pour les calculs de moments d'ordre 2.

C.4. Loi uniforme

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une expérience aléatoire consistant à tirer une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Comme le tirage se fait au hasard, la probabilité est uniforme. Par analogie, on dira donc que la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule tirée est uniforme. Elle prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$$

Définition 31.20

On dit que X suit la **loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$** si X prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$$

Plus généralement, si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a<b$, on dit que X suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ si X prend ses valeurs dans $[\![a,b]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![a,b]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{b-a+1}$$

Remarques

a. La loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ est notée $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Proposition 31.21

Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Exercice 31.6 Démontrer la proposition 31.21.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 31-1

Comme on effectue trois lancers indépendants d'une pièce équilibrée, il est naturel d'envisager l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = \{P, F\}^3$, $\mathcal{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
On peut déjà remarquer que X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ donc, comme $\mathcal{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega)$, X est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Par ailleurs, le nombre de « face » obtenus en trois lancers est nécessairement un nombre entier de $\{0, 1, 2, 3\}$ donc X prend ses valeurs dans $[\![0, 3]\!]$. Déterminer la loi de X revient alors à calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque $k \in [\![0, 3]\!]$.
Enfin, on peut remarquer que :

$$[X = 0] = \{(P, P, P)\}, \quad [X = 1] = \{(F, P, P), (P, F, P), (P, P, F)\}$$
$$[X = 2] = \{(F, F, P), (F, P, F), (P, F, F)\} \quad \text{et} \quad [X = 3] = \{(F, F, F)\}$$

et donc, comme la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$$

Ainsi, la loi de X est caractérisée par la donnée du tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Correction de l'exercice 31-2

X est une variable aléatoire discrète finie (elle prend ses valeurs dans $[\![0, 3]\!]$), donc elle admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3)$$

et donc, d'après les calculs effectués dans l'exercice 26.1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31-3

X est une variable aléatoire discrète finie et $\varphi : t \mapsto t^2$ est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, donc, d'après 31.8, X^2 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X = 3)$$

et donc, d'après les calculs effectués dans l'exercice 26.1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} \\ &= 3\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31-4

X est une variable aléatoire discrète finie donc X admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

et donc, d'après les calculs effectués dans les exercices 26.3 et 26.4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31-5

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, X est une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \end{aligned}$$

et finalement, d'après la formule du binôme de Newton et comme $p + (1-p) = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = np$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} [k(k-1)+k] \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

et donc, si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \mathbb{E}(X) \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-2-k} + np \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} + np \\ &= n(n-1)p^2 + np \\ &= np(np-p+1) \end{aligned}$$

et alors, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= np(np-p+1) - (np)^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31-6

Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, X est une variable aléatoire discrète finie, donc elle admet une espérance et une variance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbb{P}(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(4n+2)-(n+1)(3n+3)}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

Sommaire