25 Extrema des fonctions réelles de deux variables

ECG Maths Appliquées
Semestre 4

A. Notions de topologie

Définition 25.1

Soit $\mathcal{O}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{O}$ est une **partie ouverte** ou plus simplement un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si $\Omega = \varnothing$ ou si :

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{O},\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x,y),(x_0,y_0)) < \alpha \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{O}$$

Définition 25.2

Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que F est une **partie fermée** ou plus simplement un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert.

Remarques

a. $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

b. On pourra être rassuré par la lecture du programme, qui indique clairement : « *la détermination de la nature topologique d'un ensemble [(ouvert, fermé ou aucun des deux)] n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée* ». L'introduction des définitions précédentes n'a donc pas d'autre but que de définir le cadre dans lequel la suite du cours va se situer.

c. Pour faire simple (et fort peu rigoureux), on pourra retenir qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si elle ne contient aucun des points se situant à sa frontière et qu'une partie est fermée si elle contient tous les points se situant à sa frontière.

Exemples 25.1

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y - xy < 2\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

b. Pour tout réel r strictement positif, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ d((x,y),(a,b)) < r\}$ est ouvert.

c. Pour tout réel r positif ou nul, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ d((x,y),(a,b)) \leqslant r\}$ est fermé.

Définition 25.3

On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^2$ est **bornée** s'il existe un réel M positif ou nul tel que :

$$\forall (x,y) \in E,\ d((x,y),(0,0)) \leqslant M$$

Exercice 25.1 Dire si les ensembles suivants sont bornés :

$$[0,1]^2, \quad E = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \ /\ x + y \leqslant 1\right\}, \quad F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 \leqslant x - y \leqslant 2\right\}$$

B. Fonctions réelles de deux variables réelles

B.1. Continuité d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Définition 25.4

Soit f une fonction définie sur une partie P de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur P si f est continue en tout point de P.

Proposition 25.5

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 25.6

Soit f et g deux fonctions continues sur une partie P de $\mathbb{R}^2$.

i. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)\,g(x)$ sont continues sur P.

ii. Si g ne s'annule pas sur P, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur P.

Proposition 25.7

Si f est une fonction continue sur une partie P de $\mathbb{R}^2$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur P.

B.2. Dérivées partielles, gradient

Dans toute cette, $\mathcal{O}$ désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Définition 25.8

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un élément de $\mathcal{O}$.

i. La fonction $f_{(x_0,y_0),1} : x \mapsto f(x, y_0)$ est appelée première fonction partielle de f en (x_0, y_0).

ii. La fonction $f_{(x_0,y_0),2} : y \mapsto f(x_0, y)$ est appelée deuxième fonction partielle de f en (x_0, y_0).

Définition 25.9

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{O}$ et (x_0, y_0) un élément de $\mathcal{O}$.

i. On dit que f admet une première dérivée partielle en (x_0, y_0) si la première fonction partielle $f_{(x_0,y_0),1} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 et on note dans ce cas :

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = f'_{(x_0,y_0),1}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

ii. On dit que f admet une deuxième dérivée partielle en (x_0, y_0) si la première fonction partielle $f_{(x_0,y_0),2} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 et on note dans ce cas :

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = f'_{(x_0,y_0),2}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on dit que f admet une $i^{ème}$ dérivée partielle d'ordre 1, notée $\partial_i f$, sur $\mathcal{O}$ si f admet une $i^{ème}$ dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathcal{O}$.

Définition 25.10

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ et (x, y) un élément de $\mathcal{O}$. Si $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$ existent alors le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}$$

est appelé **gradient** de f en (x, y).

Définition 25.11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{O}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ si les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies et continues sur $\mathcal{O}$.

Proposition 25.12

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 25.13

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

i. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

Proposition 25.14

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

C. Calcul différentiel : ordre 2

C.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 25.15

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ et (x, y) un élément de $\mathcal{O}$. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, si f admet une $j^{ème}$ dérivée partielle sur $\mathcal{O}$ et si $\partial_j f$ admet une $i^{ème}$ dérivée partielle en (x, y), alors on note :

$$\partial^2_{i,j} f(x, y) = \partial_i(\partial_j f)(x, y)$$

Les fonctions $\partial^2_{i,j} f$, lorsqu'elles existent, sont appelée dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Définition 25.16

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{O}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la fonction $\partial^2_{i,j}$ est définie et continue sur $\mathcal{O}$.

Proposition 25.17

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

Proposition 25.18

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

i. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)\,g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

Proposition 25.19

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

Théorème 25.20 ▶ Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ \partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

C.2. Matrice hessienne

Définition 25.21

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{O}$ et (x,y) un élément de $\mathcal{O}$. Si, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial^2_{i,j} f(x,y)$ existe, alors la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$$

est appelé **matrice hessienne** de f en (x,y).

Théorème 25.22

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, alors sa matrice hessienne de f est symétrique réelle en tout point de $\mathcal{O}$.

D. Recherche d'extrema

D.1. Définitions

Définition 25.23

Soit f une fonction définie sur une partie P de $\mathbb{R}^2$ et x_0 un élément de P.

1. On dit que $f(x_0)$ est un **minimum global** de f si :

$$\forall x \in P,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

2. On dit que $f(x_0)$ est un **maximum global** de f si :

$$\forall x \in P,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

3. On dit que $f(x_0)$ est un **extremum global** de f si c'est un minimum global ou un maximum global.

Définition 25.24

Soit f une fonction définie sur une partie P de $\mathbb{R}^2$ et x_0 un élément de P.

1. On dit que $f(x_0)$ est un **minimum local** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que :
$$\forall x \in P \ / \ ||x - x_0|| < \alpha, \ f(x) \geqslant f(x_0)$$
2. On dit que $f(x_0)$ est un **maximum local** de f s'il existe un réel α strictement positif tel que :
$$\forall x \in P \ / \ ||x - x_0|| < \alpha, \ f(x) \leqslant f(x_0)$$
3. On dit que $f(x_0)$ est un **extremum local** de f si c'est un minimum local ou un maximum local.

D.2. Extremum sur un ensemble fermé borné

Théorème 25.25

Si f est une fonction continue sur une partie K de $\mathbb{R}^2$ et si K est une partie fermée et bornée, alors f admet un minimum global et un maximum global.

D.3. Condition d'ordre 1

Théorème 25.26

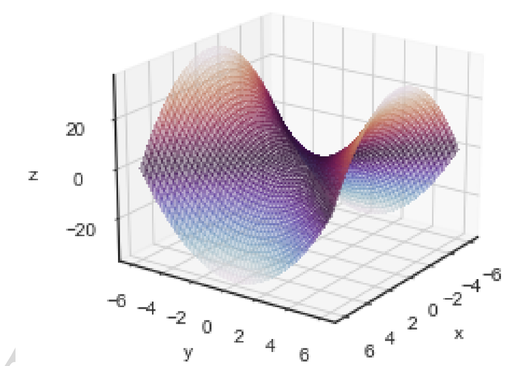
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et si f admet un extremum local en x, alors : $\nabla f(x) = 0$.

Définition 25.27

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, on appelle **point critique** de f tout élément x de $\mathcal{O}$ tel que $\nabla f(x) = 0$.

Remarques

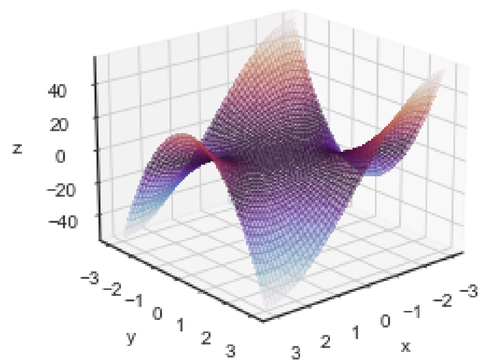
a. Bien retenir qu'il ne s'agit que d'une condition nécessaire : le gradient d'une fonction peut s'annuler en un point a sans qu'elle admette un extremum en a (voir graphiques).



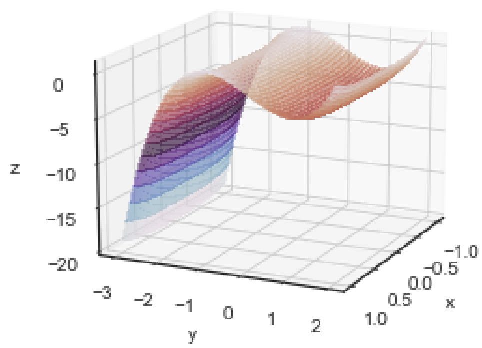
$(0,0)$ est un point critique de $h : (x,y) \mapsto y^2 - x^2$ mais i n'a pas d'extremum en ce point : c'est un point selle (noter l'allure du graphe).

b. Attention aux hypothèses : il est important que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert pour que la recherche des points critiques ait un sens. Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto x + y$ admet un maximum global sur $[0,1]^2$, atteint en $(1,1)$ (et qui vaut 2), alors que son gradient ne s'annule pas.

c. Retenir la méthode utilisée dans l'exemple suivant pour l'étude en $(0,0)$. Lorsque a est un point critique et qu'une étude générale du signe de $f(x)-f(a)$ n'est pas évidente, on peut commencer par étudier le signe lorsque x appartient à des droites particulières passant par a. En pratique, on commence par étudier le signe de $f(a+th)-f(a)$ lorsque t est proche de 0, pour des vecteurs h simples, du type $(1,0),(0,1),(1,1)$ ou $(1,-1)$. Pour démontrer qu'il n'y a pas d'extremum en a.Dans l'exemple, on avait $a=(0,0)$ et on a choisi les directions $(1,1)$ et $(1,0)$.



$(0,0)$ est un point critique de $(x,y)\mapsto x^3-3xy^2$ mais cette fonction n'a pas d'extremum en ce point : c'est un point col (ou selle).



$g:(x,y)\mapsto x^4+y^3-3y-2$ admet un minimum local en $(0,1)$ mais celui-ci n'est pas global.

Exemple 25.2 Déterminons les extrema de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

◇ f est une fonction polynôme donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, elle ne peut ainsi admettre d'extremum qu'en un point critique (*i.e.* annulant son gradient). De plus, on a :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \nabla f(x,y)=\big(4x^3-4(x-y),4y^3+4(x-y)\big)$$

et donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=0 &\iff \begin{cases}4x^3=4(x-y)\\4y^3=-4(x-y)\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x^3=x-y\\y^3=-x^3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x(x^2-2)=0\\y=-x\end{cases}\\ &\iff (x,y)\in\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

Ainsi, f ne peut admettre d'extremum qu'en l'un des points

$$x_1=(0,0),\quad x_2=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\quad\text{et}\quad x_3=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

◇ De plus on a :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

On peut remarquer que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}f(t,t)-f(0,0)=2t^4\\f(t,0)-f(0,0)=t^2(t^2-2)\end{cases}$$

et donc :

$$\forall t\in\left]0,\sqrt{2}\right[,\ \begin{cases}f(t,t)-f(0,0)>0\\f(t,0)-f(0,0)<0\end{cases}$$

ce qui suffit pour affirmer que $f(0,0)$ n'est pas un extremum local de f puisque, pour tout réel $\alpha > 0$, on peut choisir deux points $a = (t,t)$ et $b = (t,0)$ vérifiant :

$$\begin{cases} d(a,x_1) < \alpha \\ d(b,x_1)\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(a) > f(x_1) \\ f(b) < f(x_1) \end{cases}$$

◇ Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f(\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 \\ &= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 8 \\ &= x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 + 2(x^2 + 2xy + y^2) + 8 \\ &= (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $f(x_2) = -8$ est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

◇ De même, on prouve que $f(x_3) = -8$ est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 25.28

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$, on dit que x_0 est un **point selle** (ou que f admet un **col** en x_0 selon les cas) si x_0 est un point critique de f et si f n'admet pas d'extremum local en x_0.

D.4. Conditions suffisantes d'ordre 2

Théorème 25.29 ▶ Condition suffisante d'extremum local

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point critique de f.

i. Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont toutes strictement positives, alors f admet un minimum local en x_0.

ii. Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont toutes strictement négatives, alors f admet un maximum local en x_0.

iii. Si $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors f n'admet pas d'extremum en x_0.

Exercice 25.2 Déterminer les éventuels extremums locaux de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque Les conditions 25.29 ne sont que des conditions suffisantes, et il arrivera qu'elles ne permettent pas de conclure, dans le cas où 0 est valeur propre de la matrice hessienne en un point critique (x_0, y_0). Dans ce cas, f peut admettre, ou non, un extremum en (x_0, y_0) et la matrice hessienne ne permet pas de conclure.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 25-1

◇ On a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ d((x,y),(0,0)) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &\leqslant \sqrt{2} \end{aligned}$$

donc l'ensemble $[0,1]^2$ est borné.

◇ On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(x,y) \in E &\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1-y \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \end{cases} \\ &\Longrightarrow d((x,y),(0,0)) \leqslant \sqrt{2}\end{aligned}$$

donc E est borné.

◇ On a :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leqslant x \leqslant y+2\right\}$$

En particulier, on en déduit que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, $(x,y) = (M,M)$ appartient à F et donc :

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \ \exists\, (x,y) \in F \ / \ d((x,y),(0,0)) > M$$

ce qui prouve que F n'est pas borné.

Correction de l'exercice 25-2

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert, donc si f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^2$, alors : $\nabla f(a) = 0$. Or on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = -2y$$

donc :

$$\nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$$

donc $(0,0)$ est l'unique point critique de f. De plus, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2, \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = -2,$$

donc :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On constate que $\nabla^2 f(0,0)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, donc f n'a pas d'extremum local.

Sommaire