24 Fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^2$

ECG Maths Appliquées
Semestre 4

A. Généralités

Définition 24.1

On appelle **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f : (x, y) \mapsto ax + by + c$$

où a, b et c sont des constantes réelles.

Exemple 24.1 Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto x + 2y - 1$ sont des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 24.2

On appelle **fonction polynôme** définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ combinaison linéaire finie de fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto x^i y^j$$

où i et j sont des entiers naturels quelconques.

Exemples 24.2

a. Les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^2$ sont des fonctions polynômes.

b. Les fonctions $(x, y) \mapsto x^3y + 2xy + y^4$ et $(x, y) \mapsto -x^2 + 2x + y$ sont des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$.

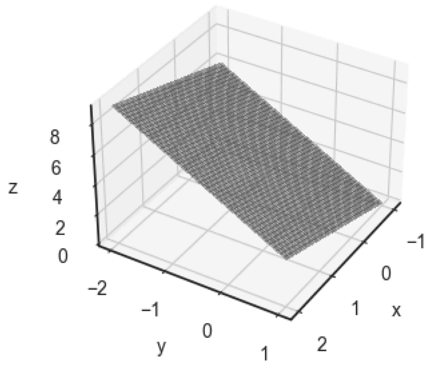


FIGURE 24.1 – Représentation graphique de la fonction affine $(x, y) \mapsto x - 2y + 3$

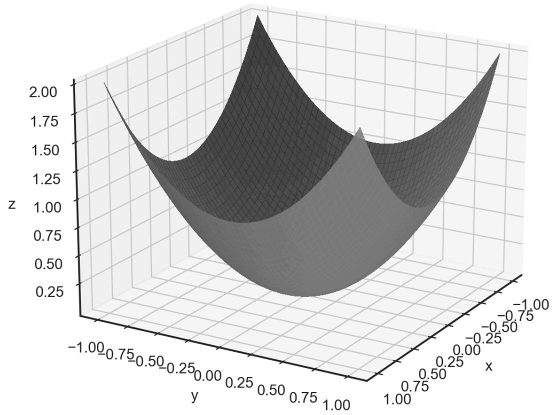


FIGURE 24.2 – Représentation graphique de la fonction polynôme $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

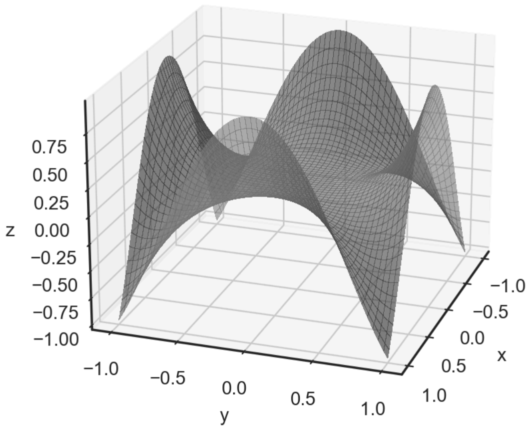


FIGURE 24.3 – Représentation graphique de la fonction polynôme $(x, y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

Définition 24.3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. On appelle **graphe** de f l'ensemble

$$G(f) = \left\{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Définition 24.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel k, l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x, y) = k\right\}$$

est appelé **ligne de niveau** k de f.

Remarque Pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est l'intersection du graphe de f et de l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = k$.

Exemple 24.3 Par exemple, si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, alors :

- si $k < 0$, la ligne de niveau k de f est vide,
- si $k = 0$, la ligne de niveau 0 de f est le singleton $\{(0, 0)\}$,
- si $k > 0$, la ligne de niveau k de f est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = k$, c'est-à-dire le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

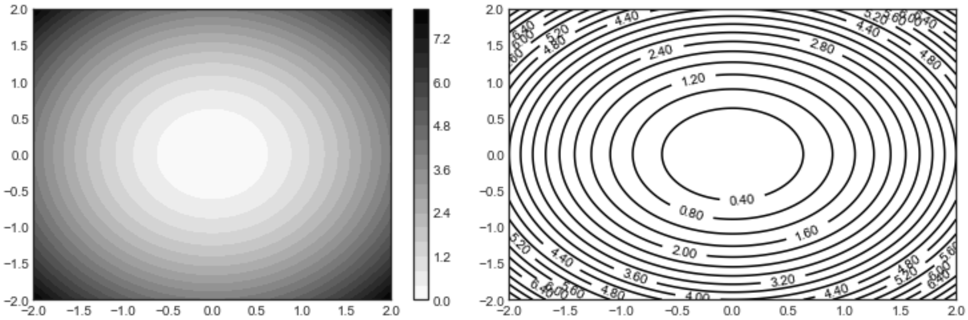


FIGURE 24.4 – Deux représentations graphiques de lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

B. Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 24.5

On appelle distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ l'application d définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

Remarques

a. Pour tout réel $r \geqslant 0$ et pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, d((x,y),(x_0,y_0)) = r\}$ est le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r.

b. Pour tout réel $r \geqslant 0$ et pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, d((x,y),(x_0,y_0)) \leqslant r\}$ est le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon r.

Définition 24.6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

i. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est **continue** en (x_0, y_0) si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x,y),(x_0,y_0)) < \alpha \Longleftrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

ii. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.7

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.8

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

i. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)\,g(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.9

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 24.4 La fonction $f : (x,y) \mapsto \big(x^2+y\big)\ln(x^2+1) + x^2y^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et somme de fonctions qui le sont.

En effet, les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y$ et $(x,y) \mapsto x^2y^3$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynômes et la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+1)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction $(x,y) \mapsto x^2+1$, continue sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que fonction polynôme) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par la fonction ln, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque Attention à la précision dans les justifications, notamment lorsqu'il y a une composition, car les fonctions ne sont pas toutes définies sur le même ensemble (et n'ont d'ailleurs pas toutes le même nombre de variables).

Exercice 24.1

1. Justifier que la fonction $||\cdot|| : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+y+xy}{x^2+y^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

C. Calcul différentiel : ordre 1

C.1. Dérivées partielles, gradient

Définition 24.10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x_0,y_0) un élément de $\mathbb{R}^2$.

i. La fonction $f_{(x_0,y_0),1} : x \mapsto f(x,y_0)$ est appelée première fonction partielle de f en (x_0,y_0).

ii. La fonction $f_{(x_0,y_0),2} : y \mapsto f(x_0,y)$ est appelée deuxième fonction partielle de f en (x_0,y_0).

Exemples 24.5

a. Si $f : (x,y) \mapsto x^2+xy+y^3$, les fonctions partielles de f en $(1,2)$ sont les fonctions

$$f_{(1,2),1} : x \mapsto f(x,2) = x^2+2x+8 \quad \text{et} \quad f_{(1,2),2} : y \mapsto f(1,y) = 1+y+y^3$$

b. Si $g : (x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y+xy$, les fonctions partielles de f en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions

$$g_{(a,b),1} : x \mapsto g(x,b) = x\mathrm{e}^b+bx \quad \text{et} \quad g_{(a,b),2} : y \mapsto g(a,y) = a\mathrm{e}^y+ay$$

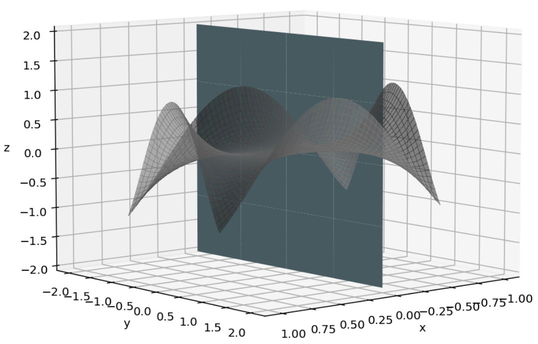


FIGURE 24.5 – Représentation graphique de $(x,y) \mapsto x^4-3x^2y^2+y^4$ et du plan d'équation $y=0$

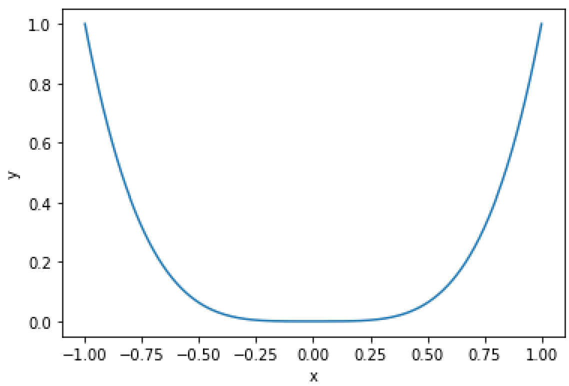


FIGURE 24.6 – Représentation graphique de $x \mapsto f(x,0)$

Remarque Le graphe de la première (respectivement de la deuxième) fonction partielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $y=b$ (respectivement $x=a$).

Définition 24.11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un élément de $\mathbb{R}^2$.

i. On dit que f admet une première dérivée partielle en (x_0, y_0) si la première fonction partielle $f_{(x_0,y_0),1} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 et on note dans ce cas :

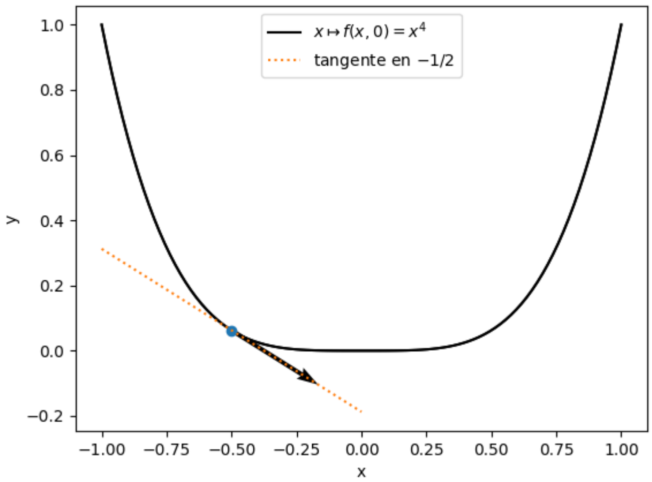
$$\partial_1 f(x_0, y_0) = f'_{(x_0,y_0),1}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

ii. On dit que f admet une deuxième dérivée partielle en (x_0, y_0) si la première fonction partielle $f_{(x_0,y_0),2} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 et on note dans ce cas :

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = f'_{(x_0,y_0),2}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on dit que f admet une $i^{ème}$ dérivée partielle d'ordre 1, notée $\partial_i f$, sur $\mathbb{R}^2$ si f admet une $i^{ème}$ dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Remarque On peut par exemple remarquer que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et si $\partial_1 f(a, b)$ existe, alors $\partial_1 f(a, b)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de la première fonction partielle $x \mapsto f(x, b)$.



La première dérivée partielle de

$$f : (x, y) \mapsto x^4 - 3x^2y^2 + y^4$$

en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $x \mapsto f(x, 0)$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$

Exemple 24.6 On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$, définie sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x, y) = g'(x) = 6x + 2y + 2xy^3$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h : y \mapsto 3x^2 + 2xy + x^2y^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x, y) = h'(x) = 2x + 3x^2y^2$$

Exercice 24.2

1. Étudier l'existence des dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^3$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de $g : (x, y) \mapsto 2xy + e^{x^2+y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 24.12

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$. Si $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ existent alors le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

est appelé **gradient** de f en (x,y).

Exercice 24.3

1. Déterminer le gradient de $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^3$ en $(0,0)$ et en $(1,2)$.
2. Déterminer le gradient de $g : (x,y) \mapsto 2xy + \mathrm{e}^{x^2+y}$ en $(1,-1)$.

Définition 24.13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.14

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.15

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

i. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.16

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 24.7 La fonction $f : (x,y) \mapsto \left(x^2+y\right)\ln(x^2+1) + x^2y^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions qui le sont.

En effet, les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y$ et $(x,y) \mapsto x^2y^3$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynômes et la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction $(x,y) \mapsto x^2+1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que fonction polynôme) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par la fonction ln, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = 2x\ln(x^2+1) + \frac{2x\left(x^2+y\right)}{x^2+1} + 2xy^3$$

et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y) = \ln(x^2+1) + 2x^2y^2$$

Exercice 24.4 Justifier que la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^4+y^2+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

D. Calcul différentiel : ordre 2

D.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 24.17

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, si f admet une $j^{ème}$ dérivée partielle sur $\mathbb{R}^2$ et si $\partial_j f$ admet une $i^{ème}$ dérivée partielle en (x,y), alors on note :

$$\partial^2_{i,j} f(x,y) = \partial_i(\partial_j f)(x,y)$$

Les fonctions $\partial^2_{i,j} f$, lorsqu'elles existent, sont appelée dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Définition 24.18

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la fonction $\partial^2_{i,j}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.19

Les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.20

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

i. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)\,g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

ii. Si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 24.21

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24.5 Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2) + 2x^3 - 4x^2y$$

Théorème 24.22 ▶ Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

Exercice 24.6 Dans chacun des cas suivants, justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

1. $f : (x,y) \mapsto (2x+y)\,\mathrm{e}^{x-3y}$
2. $f : (x,y) \mapsto y\,\ln(x^2+y^2+2)$

D.2. Matrice hessienne

Définition 24.23

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$. Si, pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\partial^2_{i,j} f(x, y)$ existe, alors la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$$

est appelé **matrice hessienne** de f en (x, y).

Exemple 24.8 La fonction $f : (x, y) \mapsto 2x^2 y + 3xy - y^4$ est une fonction polynôme, donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = 4xy + 3y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2x^2 + 3x - 4y^3$$

d'où :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \partial^2_{1,1} f(x,y) = 4y \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) = 4x + 3 \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = -12y \end{cases}$$

On en déduit que la matrice hessienne de f en $(0, 1)$ est :

$$\nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

Théorème 24.24

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors sa matrice hessienne de f est symétrique réelle en tout point de $\mathbb{R}^2$.

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 24-1

1. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui prouve que la fonction $||\cdot||$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les fonctions $(x, y) \mapsto y + xy$ et $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ sont des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}^2$ donc elles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   On en déduit que la fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + y + xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions qui le sont, puis que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 24-2

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = 2x + y$$

   De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y) = x + 3y^2$$

2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, donc g admet une première dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(g)(x,y) = 2y + 2x\mathrm{e}^{x^2+y}$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, donc g admet une deuxième dérivée partielle d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2(g)(x,y) = 2x + \mathrm{e}^{x^2+y}$$

Correction de l'exercice 24-3

1. On a vu dans l'exercice précédent que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et en reprenant les calculs déjà effectués, on a :

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0, \quad \partial_1 f(1,2) = 4 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(1,2) = 13$$

donc :

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2. De même, en reprenant les calculs effectués dans l'exemple précédent, on obtient :

$$\partial_1\, g(1,-1) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2\, g(1,-1) = 3$$

donc :

$$\nabla g(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 24-4

La fonction $(x,y) \mapsto x^4 + y^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ donc la fonction $(x,y,z) \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^4+y^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
Enfin, cette fonction prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 24-5

► La fonction $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme. De plus elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2+1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
En outre la fonction $(x,y) \mapsto 2x^3 - 4x^2y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynôme. Il en découle que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions qui le sont.
De plus on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} + 6x^2 - 8xy \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1} - 4x^2$$

On en déduit dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_{1,1}^2 f(x,y) &= \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - (2x)^2}{(1+x^2+y^2)^2} + 12x - 8y \\ &= \frac{2\left(1-x^2+y^2\right)}{(1+x^2+y^2)^2} + 12x - 8y \end{aligned}$$

On obtient dans un deuxième temps, en dérivant $\partial_2 f(x,y)$ par rapport à x :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_{1,2}^2 f(x,y) = -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} - 8x$$

et de même, en dérivant $\partial_1 f(x,y)$ par rapport à y :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_{2,1}^2 f(x,y) = -\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} - 8x$$

Enfin on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - (2y)^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2\left(1+x^2-y^2\right)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Correction de l'exercice 24-6

1. ▶ La fonction $(x,y) \mapsto x - 3y$ est une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x-3y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus la fonction $(x,y) \mapsto 2x + y$ est une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions qui le sont.

   ▶ De plus, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y) = 2\mathrm{e}^{x-3y} + (2x+y)\,\mathrm{e}^{x-3y} = (2x+y+2)\,\mathrm{e}^{x-3y}$$

   et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y) = \mathrm{e}^{x-3y} - 3\,(2x+y)\,\mathrm{e}^{x-3y} = (1-6x-3y)\,\mathrm{e}^{x-3y}$$

   ▶ On en déduit, après simplifications :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \partial^2_{1,1} f(x,y) = (2x+y+4)\,\mathrm{e}^{x-3y} \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -\,(6x+3y+5)\,\mathrm{e}^{x-3y} \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = (18x+9y-6)\,\mathrm{e}^{x-3y} \end{cases}$$

2. ▶ La fonction $(x,y) \mapsto y$ est une fonction affine de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   De plus la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$ est une fonction polynôme de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2+2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Il en découle que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions qui le sont.

   ▶ De plus, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2+2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = \ln(x^2+y^2+2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2+2}$$

   ▶ On en déduit :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \partial^2_{1,1} f(x,y) = \dfrac{2y\left(y^2-x^2+2\right)}{(x^2+y^2+2)^2} \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = \dfrac{2x\left(x^2-y^2+2\right)}{(x^2+y^2+2)^2} \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = \dfrac{2y\left(3x^2+y^2+6\right)}{(x^2+y^2+2)^2} \end{cases}$$

Sommaire