23 Intégrales généralisées

ECG Maths Appliquées
Semestre 3

A. Intégration sur un intervalle quelconque

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

A.1. Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 23.1

i. Si f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que l'intégrale existe) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$; dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ii. Si f une fonction continue sur $]-\infty, a]$, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que l'intégrale existe) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$; dans ce cas, on note :

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans les deux cas, lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Remarques

a. Autrement dit, si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les primitives de f sur $[a, +\infty[$ ont une limite finie en $+\infty$; de plus, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors, pour tout primitive F de f sur $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

Il en découle que, si f est continue sur $[a, +\infty[$ et si $c \in [a, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b. De même, si f est une fonction continue sur $]-\infty, a]$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les primitives de f sur $]-\infty, a]$ ont une limite finie en $-\infty$; de plus, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors, pour tout primitive F de f sur $]-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

Il s'ensuit que, si f est continue sur $]-\infty, a]$ et si $c \in\,]-\infty, a]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Étudier la nature (ou l'existence) d'une intégrale, c'est déterminer si cette intégrale est convergente ou divergente.

Exercice 23.1 Déterminer la nature et la valeur en cas de convergence des intégrales $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Définition 23.2

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si les deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et on note, dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23.2 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 23.3 Déterminer la nature, et la valeur en cas de convergence, des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$.

A.2. Les intégrales de référence

Proposition 23.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$ et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Exercice 23.4 Démontrer la proposition 23.3.

Théorème 23.4 ▶ Intégrales de Riemann

Soit α un réel quelconque.
L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Exercice 23.5 Démontrer le théorème 23.4.

Remarque Ces résultats sont fondamentaux et seront largement utilisés avec les résultats du paragraphe C.2 pour étudier la nature d'une intégrale impropre.

A.3. Un critère nécessaire de convergence

Théorème 23.5

Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et **si la fonction f admet une limite en $+\infty$** alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Preuve On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que f admette une limite ℓ en $+\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell \neq 0$.
On traite le cas où ℓ est un réel strictement positif ou $+\infty$ (le cas où ℓ est strictement négatif ou $-\infty$ s'en déduit en substituant $-f$ à f) et on note $A = \dfrac{\ell}{2}$ si ℓ est réel et $A = 1$ sinon. Par définition de la limite, il existe alors un réel $a_0 \geqslant a$ tel que :

$$\forall t \geqslant a_0,\ f(t) \geqslant A$$

et alors, par croissance de l'intégration :

$$\begin{aligned}\forall x \geqslant a_0,\ \int_{a_0}^{x} f(t)\,dt &\geqslant \int_{a_0}^{x} A\,dt\\ &\geqslant A\,(x-a_0)\end{aligned}$$

et alors, d'après la relation de Chasles :

$$\forall x \geqslant a_0,\ \int_a^x f(t)\,dt \geqslant A\,(x-a_0) + \int_a^{a_0} f(t)\,dt$$

Or, comme $A > 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[A\,(x-a_0) + \int_a^{a_0} f(t)\,dt\right] = +\infty$$

et donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, donc il y a contradiction. □

Remarques

a. Ce résultat ne fait pas partie du programme, mais il est fondamental et il est donc important de savoir le démontrer rapidement. On notera en particulier qu'on en déduit, par contraposée, que si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$ admettant une limite non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

b. Attention, si un grand nombre de définitions et propriétés conduisent à faire une analogie entre intégrales impropres et séries, on constate que le critère nécessaire de convergence n'est pas le même. En effet, alors que la convergence de la série $\sum u_n$ implique que la suite u converge vers 0, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ n'implique pas l'existence d'une limite pour f en $+\infty$.

B. Règles de calcul sur les intégrales impropres

Dans toute cette section, a désigne encore un réel quelconque. Les résultats présentés ici sont des conséquences immédiates des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, de l'algèbre des limites et de la conservation des inégalités par passage à la limite, et c'est pourquoi nous n'en présentons pas de preuve ici. Tous les résultats sont présentés dans le cas d'intégrales sur $[a,+\infty[$ d'une fonction continue, mais ils s'adaptent de manière immédiate au cas de l'intégrale d'une fonction continue sur $]-\infty,a]$ ou sur $\mathbb{R}$.

B.1. Linéarité de l'intégration

Théorème 23.6

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} [\lambda f(t)+\mu g(t)]\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques

a. Cette propriété fait que l'ensemble E des fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. De même, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t$ diverge.

c. En revanche, si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux divergentes, on ne peut rien dire quant à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t$.

Théorème 23.7 ▶ Linéarité de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(t)+\mu g(t)]\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Attention à ne pas utiliser la linéarité de l'intégration tant que la convergence des intégrales impropres en présence n'a pas été établie.

B.2. Relation de Chasles

Théorème 23.8 ▶ Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors, pour tout $b\in[a,+\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque Attention à ne pas utiliser la relation de Chasles tant que la convergence des intégrales impropres en présence n'a pas été établie.

B.3. Croissance de l'intégration

Théorème 23.9 ▶ Positivité de l'intégration

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Théorème 23.10

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

i. Si f est positive, si f n'est pas constante nulle sur $[a, +\infty[$, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

ii. Si f est de signe constant sur $[a, +\infty[$, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, +\infty[\,,\ f(t) = 0$$

Théorème 23.11 ▶ Croissance de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que :

$$\forall t \in [a, +\infty[\,,\ f(t) \leqslant g(t)$$

Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

B.4. Changement de variable, intégration par parties

« Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variable non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment » (extrait du programme officiel).

Théorème 23.12

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

i. Si $\varphi : t \mapsto \alpha t + \beta$ est une fonction affine telle que $\alpha > 0$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors le changement de variable $u = \alpha t + \beta$, $\mathrm{d}u = \alpha\,\mathrm{d}t$ permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha a+\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right) \mathrm{d}u$ est convergente et que :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha a+\beta}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right) \mathrm{d}u$$

ii. Si $\varphi : t \mapsto \alpha t + \beta$ est une fonction affine telle que $\alpha < 0$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors le changement de variable $u = \alpha t + \beta$, $\mathrm{d}u = \alpha\,\mathrm{d}t$ permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha a+\beta} \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right)\mathrm{d}u$ est convergente et que :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\alpha a+\beta} \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right)\mathrm{d}u$$

Remarque Ce théorème est donné ici à titre indicatif, le programme semblant indiquer qu'il est autorisé de procéder à un changement de variable affine dans une intégrale impropre. Mais plutôt que de chercher à retenir un théorème indigeste, on pourra retenir que le changement de variable affine dans une intégrale impropre conserve la nature et peut être effectuée comme dans le cas de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Proposition 23.13

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

i. Si f est paire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

ii. Si f est impaire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Preuve On sait déjà que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ l'est aussi. Réciproquement, supposons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente. La fonction $t \mapsto -t$ est une fonction affine donc, en effectuant le changement de variable $u = -t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ (quand $t = a$, $u = -a$ et quand t tend vers $+\infty$, u tend vers $-\infty$, on peut affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Il en découle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que :

- si f est paire, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u$,
- si f est impaire, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-\infty}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u$,

ce qui achève la preuve grâce à la relation de Chasles.

□

Exercice 23.6 À l'aide d'une intégration par parties, étudier la nature, et la valeur en cas de convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

C. Intégrales impropres d'une fonction positive

Dans toute cette partie, a désigne un réel. Tous les résultats sont présentés dans le cas d'intégrales sur $[a, +\infty[$ d'une fonction continue, mais ils s'adaptent de manière immédiate au cas de l'intégrale d'une fonction continue sur $]-\infty, a]$.

C.1. Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 23.14

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Preuve Si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a, +\infty[$ donc, comme f est positive sur $[a, +\infty[$, F est croissante et admet donc une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée (théorème de la limite monotone). ☐

Remarques

a. On peut également remarquer que, si f est une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\forall x \in [a, +\infty[\,,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

b. De même, si la fonction f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ (qui est une primitive de $-f$) est décroissante sur $]-\infty, a]$ donc admet une limite finie en a à droite si et seulement si elle est majorée (attention, on a bien dit majorée, et non minorée). Par conséquent, si f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty, a]$.

C.2. Critères de comparaison

Les résultats énoncés dans ce paragraphe sont fondamentaux : dans la majeure partie des cas, c'est l'utilisation de l'un de ces théorèmes qui servira à étudier la nature d'une intégrale impropre.

Théorème 23.15 ▶ Comparaison par majoration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que :

$$\forall t \in [a, +\infty[\,,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

i. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

ii. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge également.

Théorème 23.16 ▶ Comparaison par équivalence

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$ telles que :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarques

a. Dans les hypothèses, il suffit en fait que l'une des deux fonctions soit positive sur un voisinage $+\infty$ inclus dans $[a, +\infty[$. En effet, il existe alors un intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[a, +\infty[$ sur lequel f et g sont toutes deux positives (deux fonctions équivalentes en un point étant de même signe au voisinage de ce point).

b. Ce résultat est encore vrai si les fonctions f et g sont négatives sur $[a, +\infty[$ puisque, dans ce cas, on peut l'appliquer à $-f$ et $-g$.

Théorème 23.17 ▶ Comparaison par négligeabilité

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$ telles que :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \circ(g(t))$$

i. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

ii. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge également.

Remarque Parmi les différents critères de comparaison, on pourra noter que le critère par négligeabilité s'avérera particulièrement utile pour étudier la nature d'une intégrale impropre, notamment en comparant avec une intégrale de Riemann de référence :

Méthode 23.18

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$:

- pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, on peut chercher un réel $\alpha > 1$ tel que :

$$f(t) \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$$

- pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, on peut chercher un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que :

$$\frac{1}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} \circ(f(t)) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$$

Le plus souvent, on étudiera la limite de l'une des fonctions $t \mapsto t^2 f(t)$ ou $t \mapsto \sqrt{t} f(t)$ en $+\infty$, le choix se faisant selon que l'on cherche à prouver que l'intégrale est convergente ou divergente.

Exercice 23.7 Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t-1}}$.

D. Absolue convergence et semi-convergence

Dans toute cette partie, a désigne un réel et f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Tous les résultats sont présentés dans le cas d'intégrales sur $[a, +\infty[$ d'une fonction continue, mais ils s'adaptent de manière immédiate au cas de l'intégrale d'une fonction continue sur $]-\infty, a]$.

Définition 23.19

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 23.20

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarques

a. Ce résultat est fondamental puisqu'il permettra dans de nombreuses situations de prouver la convergence d'une intégrale impropre d'une fonction n'étant pas de signe constant en appliquant par exemple les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives à la fonction $|f|$.

b. Attention, il n'y a pas équivalence et l'on ne peut donc rien dire quant à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge.

c. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Théorème 23.21

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Preuve On a :

$$\forall t \in\,]a, +\infty[\,,\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont convergentes , on en déduit, par croissance de l'intégration :

$$-\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

□

E. Correction des exercices

Correction de l'exercice 23-1

► La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[2,+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur $[2,+\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [2,+\infty[\,,\ \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= [-\ln|1-t|]_2^x\\ &= -\ln(x-1)\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.

► La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x\\ &= 1-\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Correction de l'exercice 23-2

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ le sont, c'est-à-dire si les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
Or on a vu dans l'exercice précédent que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à 1. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \int_x^0 \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^{t}\right]_x^0\\ &= 1-\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à 1. On en déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = 2$$

Correction de l'exercice 23-3

► La fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^x\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\frac{1}{2}$. De même on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_-,\ \int_x^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t&=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_x^0\\&=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-}{2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $-\frac{1}{2}$. On en déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$$

► La fonction $t\mapsto t$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x t\,\mathrm{d}t&=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\\&=\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\,\mathrm{d}t=+\infty$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ est divergente. Il en découle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Correction de l'exercice 23-4

La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Plusieurs cas se présentent alors :

◇ Si $\alpha=0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t&=\int_0^x 1\cdot\mathrm{d}t\\&=x\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-0\cdot t}\,\mathrm{d}t=+\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

◇ Si $\alpha>0$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t&=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}\end{aligned}$$

et donc, comme $-\alpha < 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

◇ Si $\alpha < 0$, on a de même :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$$

et donc, comme $-\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 23-5

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a, si $\alpha \neq 1$:

$$\forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

De plus, si $\alpha = 1$, on a :

$$\forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x)$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. De même, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$ et on a :

$$\forall x \in \left]0,1\right],\ \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et alors :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. De même, si $a < b$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [a, b[\,,\ \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et alors :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geqslant 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Le raisonnement est analogue pour l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$.

Correction de l'exercice 23-6

La fonction $t \mapsto t^3\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x t^3\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^x t^2 \times (-2t)\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

De plus les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x t^3\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\left(\left[t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x - \int_0^x 2t\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left[t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x - \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x\right) \\ &= -\frac{x^2\, \mathrm{e}^{-x^2}}{2} - \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^3\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

ce qui nous permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 23-7

► La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-t^2} = 0$$

d'où :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

► La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t-1}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [1,+\infty[\,,\ \frac{1}{t+\sqrt{t-1}} = \frac{1}{t\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t}}\right)}$$

et donc, comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t}}\right) = 1$:

$$\frac{1}{t+\sqrt{t-1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t-1}}$ est divergente.

Sommaire