22 Compléments sur les suites et les séries

ECG Maths Appliquées
Semestre 3

A. Limite d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 22.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et a un élément de I.
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème 22.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I et f une fonction définie sur I.
Si u admet une limite ℓ (finie ou infinie) et si f admet une limite a (finie ou infinie) en ℓ, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a en $+\infty$.

Preuve La démonstration est analogue à la précédente si ℓ et a sont réels. Les autres cas (où l'une des deux limites au moins est infinie) se démontrent de manière analogue, en appliquant les définitions. Nous en laissons le soin au lecteur. □

Exercice 22.1 Déterminer la limite de $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 22.3 ▸ Théorème du point fixe

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction **continue** sur I telle que I soit stable par f (i.e. telle que $f(I) \subset I$).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par son premier terme $u_0 = a$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite u converge, alors sa limite ℓ est un point fixe de f, appartenant à I, c'est-à-dire tel que : $\ell = f(\ell)$.

Preuve Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Remarquons tout d'abord que, comme I est stable par f et comme $u_0 = a$ appartient à I, on peut montrer par récurrence que tous les termes de la suite u sont bien définis et appartiennent à I. Dès lors, comme I est un intervalle fermé (*i.e.* de la forme $]-\infty, m]$, $[m, m']$ ou $[m, +\infty[$), le théorème de prolongement des inégalités nous permet d'affirmer que ℓ appartient à I. Comme f est continue sur I, on a donc, d'après 22.2 :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$$

et finalement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\ell = f(\ell)$. □

Remarques

a. Attention : ce théorème ne garantit pas la convergence de la suite u, mais permet souvent de simplifier l'étude de la nature d'une suite définie par une telle relation de récurrence. En

© www.[…]le.com

revanche, si f n'admet pas de point fixe sur I, il permet d'affirmer que la suite u diverge.

b. Attention à ne pas oublier les hypothèses de stabilité de I par f et de continuité de f, trop souvent négligés au profit du fameux $\ell = f(\ell)$.

Exercice 22.2 Étudier la nature de la suite u définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$$

On sera amené à montrer par récurrence que tous les termes de la suite u appartiennent à $[0, 1]$.

B. Étude asymptotique des suites

B.1. Suite négligeable devant une autre

Définition 22.4

Soit u et v deux suites réelles.
On dit que u est négligeable devant v (ou que u_n est négligeable devant v_n quand n tend vers $+\infty$) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n\, v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$, ou plus simplement $u_n = \circ(v_n)$.

Exemple 22.1 Le lecteur pourra vérifier que : $\forall \alpha \in]1, +\infty[,\ \dfrac{1}{n^\alpha} = \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Remarques

a. Si u est négligeable devant v, on dit aussi que v est prépondérante sur u.

b. L'égalité $u_n = \circ(v_n)$ se lit « u_n est un petit o de v_n ».

c. De la définition, on déduit de manière immédiate la proposition suivante :

Proposition 22.5

Soit u et v deux suites réelles.
Si les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n = \circ(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Remarques

a. Attention : même si c'est le plus souvent cette proposition que l'on utilise pour prouver qu'une suite est négligeable devant une autre, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens !!!

b. Attention à l'hypothèse de départ, qui n'est pas « si v n'est pas la suite nulle ». Par exemple, la suite $(1 + (1-)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas la suite nulle, mais il n'existe pas de rang à partir duquel aucun terme de la suite n'est nul.

Proposition 22.6

Soit u, v, w, u' et v' des suites réelles.

i. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $v_n = \circ(w_n)$, alors : $u_n = \circ(w_n)$.

ii. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v'_n)$, alors : $u_n u'_n = \circ(v_n v'_n)$.

iii. Si $u_n = \circ(v_n)$ et $u'_n = \circ(v_n)$, alors : $u_n + u'_n = \circ(v_n)$.

iv. Si $u_n = \circ(v_n)$, alors : $u_n u'_n = \circ(v_n u'_n)$.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Proposition 22.7 ► Négligeabilités de référence

Soit a et b deux réels.

i. Si $a < b$, alors : $n^a = \circ(n^b)$.

ii. Si $b > 0$, alors : $(\ln n)^a = \circ(n^b)$.

iii. Si $b > 0$, alors : $n^a = \circ(\mathrm{e}^{bn})$.

iv. Si $|a| < |b|$, alors : $a^n = \circ(b^n)$.

v. $a^n = \circ(n!)$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate des croissances comparées. □

B.2. Suites équivalentes

Définition 22.8

Soit u et v deux suites réelles.
On dit que u est **équivalente** à v s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un rang p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = v_n\, h_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 22.3 Justifier que : $n^2 - n + 2 \sim n^2$.

Remarques

a. La relation $u_n \sim v_n$ se lit « u_n est équivalent à v_n ».

b. On peut remarquer que $u_n \sim v_n$ si et seulement si : $u_n = v_n + \circ(v_n)$.

c. De la définition, on déduit de manière immédiate la proposition suivante :

Proposition 22.9

Soit u et v deux suites réelles. Si u est équivalente à v, alors v est équivalente à u. Dans ce cas, on peut donc dire que les suites u et v sont équivalentes.

Théorème 22.10

Si $u_n \sim v_n$ et si ℓ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Preuve Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 1$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

□

Remarques

a. Ce résultat est sans doute le plus important de ce paragraphe : pour déterminer la limite d'une suite, il suffit donc d'en chercher un équivalent simple.

b. Attention : l'équivalence de deux suites u et v permet donc de dire que les suites u et v ont le même comportement asymptotique (*i.e.* quand n tend vers $+\infty$) mais, contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, il serait dangeraux de dire que deux suites équivalentes sont à peu près égales. Par exemple, on peut vérifier que $n^2 + n \sim n^2$. Pourtant, quand n tend vers $+\infty$, il est difficile de prétendre que $n^2 + n$ est à peu près égal à n^2, puisque la différence tend vers $+\infty$.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

c. Attention à ne pas dire que « deux suites équivalentes ont la même limite » sans préciser que l'une au moins des deux a une limite.
Par exemple, on peut vérifier que $(-1)^n(n+1) \sim (-1)^n n$, mais aucune de ces deux suites n'a de limite.

Théorème 22.11

Si ℓ est un réel **non nul** et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors : $u_n \sim \ell$.

Preuve Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors :

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant p,\ u_n = \frac{u_n}{\ell} \times \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$$

et donc : $u_n \sim \ell$. □

Remarque Attention : il est fondamental de s'assurer que ℓ est un réel non nul pour dire qu'une suite tendant vers ℓ est équivalente à ℓ. En effet, compte tenu de la définition, si $u_n \sim 0$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = 0 \times h_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

Par conséquent, seules les suites stationnaires nulles sont équivalentes à la suite nulle.

Proposition 22.12

Soit u et v deux suites réelles.

$$u_n = \circ(v_n) \Rightarrow u_n + v_n \sim v_n$$

Preuve Si $u_n \sim (v_n)$, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$

et alors :

$$\forall n \geqslant p,\ u_n + v_n = (1+\varepsilon_n)v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n) = 1$$

donc : $u_n + v_n \sim v_n$. □

Exercice 22.4 Déterminer un équivalent simple de $n^2 + \ln(n)$.

Proposition 22.13

Soit u et v deux suites réelles. Si les termes de la suite v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Preuve

- Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

S'il existe un entier naturel q tel que les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant q}$ Soit tous non nuls, alors, en notant $r = \max(p,q)$:

$$\forall n \geqslant r,\ \frac{u_n}{v_n} = h_n$$

et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

- Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, en notant q un entier tel que les termes de la suite

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

$(v_n)_{n\geqslant q}$ Soit tous non nuls, on peut définir une suite h en notant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < q \\ \dfrac{u_n}{v_n} & \text{si } n \geqslant q \end{cases}$$

et alors :

$$\forall n \geqslant q,\ u_n = h_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

donc : $u_n \sim v_n$.

□

Remarques

a. Attention : encore une fois, même si c'est le plus souvent cette proposition qui est utilisée pour démontrer que deux suites sont équivalentes, il ne s'agit pas de la définition et, surtout, il ne faut pas en oublier l'hypothèse principale : le quotient doit avoir un sens !!!

b. Attention à l'hypothèse de départ qui n'est pas « si v n'est pas la suite nulle ».

Proposition 22.14

Si u et v sont deux suites équivalentes, leurs termes sont de même signe à partir d'un certain rang.

Preuve Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier naturel p tels que :

$$\forall n \geqslant p,\ v_n = h_n u_n$$

De plus, comme (h_n) converge vers 1 et $1 > 0$, il existe un entier $r \geqslant q$ tel que :

$$\forall n \geqslant r,\ h_n > 0$$

et alors, pour tout $n \geqslant r$, u_n et v_n sont de même signe. □

Proposition 22.15

Soit u, v, w, u' et v' des suites réelles.

i. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors : $u_n \sim w_n$.

ii. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors : $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

iii. Si $u_n \sim v_n$ et si les termes des suites u et v sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.

Remarque Comme on l'a vu dans cette proposition, l'équivalence est compatible avec le produit et le quotient (lorsque celui-ci a un sens). En revanche, on ne peut pas sommer des équivalents. Par exemple, on peut voir que :

$$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

mais pourtant $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)}$ n'est pas équivalent à $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} = 0$.

Proposition 22.16

Si $u_n \sim v_n$, alors :

i. $\forall p \in \mathbb{N},\ u_n^p \sim v_n^p$,

ii. si les termes de la suite u sont tous non nuls à partir d'un certain rang, alors : $\forall p \in \mathbb{Z},\ u_n^p \sim v_n^p$,

iii. si u est strictement positive à partir d'un certain rang, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Preuve Ces résultats découlent de manière immédiate des propriétés des fonctions puissances (dont la continuité en 1) et de B.2. □

www.stephanepreteseille.com

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Remarque Attention, s'il est possible de composer par une puissance (sous réserve que celle-ci ait un sens), il n'est en général pas possible de composer par une fonction quelconque, même avec des arguments de continuité. Par exemple :

$$\frac{n}{n+1} \sim 1$$

mais $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ n'est pas équivalent à $\ln(1) = 0$.

Proposition 22.17 ► Équivalents de référence

Soit u une suite convergeant vers 0.

i. $\ln(1+u_n) \sim u_n$ *ii.* $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$ *iii.* $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

Preuve Ces équivalents découlent de manière immédiate des équivalents de référence sur les fonctions. □

Exercice 22.5 Déterminer la limite de la suite $u = (\sqrt{n^2+n} - n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C. Compléments sur les séries

Les résultats présentés dans cette partie sont fondamentaux car ils seront utilisés dans la plupart des cas pour étudier la nature d'une série. Pour éviter de graves erreurs, on notera que, dans tous les résultats énoncés dans cette partie (que l'on regroupera ensuite sous la même appellation « critères de comparaison des séries à termes positifs ») :

- **les suites envisagées sont toutes à termes positifs à partir d'un certain rang**,
- pour étudier la nature d'une série avec les critères de comparaison, on ne s'intéresse qu'à son terme général (et donc pas question de somme ici...).

Dans toute cette partie, on considère deux suites réelles u et v.

Proposition 22.18

Si u est une suite positive à partir d'un certain rang n_0, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Preuve On suppose que u est une suite positive. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k &= u_{n+1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc si et seulement si elle est majorée. □

© www.stephanepreteseille.com

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Remarque Ce résultat n'est pas mentionné dans le programme officiel, mais nous sera utile pour démontrer les résultats qui suivent. C'est pourquoi nous en soulignons l'importance ici.

C.1. Comparaison par majoration

Théorème 22.19

On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

i. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge également.

Preuve

i. On suppose que la série $\sum v_n$ converge et on note :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Par hypothèse, on a :

$$\forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k$$

et donc (en supposant, ce qui ne nuit en rien à la preuve : $p \geqslant 1$) :

$$\forall n \geqslant p,\ S_n \leqslant T_n - T_{p-1} + S_{p-1}$$

De plus, d'après 22.18 et comme la série $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc il existe un réel M tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ S_n \leqslant M - T_{p-1} + S_{p-1}$$

donc la suite $(S_n)_{n\geqslant p}$ est majorée. Comme la suite u est positive, on en déduit, de nouveau grâce à 22.18, que la série $\sum u_n$ converge.

ii. Ce résultat se déduit du précédent par contraposition.

□

Exercice 22.6 Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$.

C.2. Comparaison par négligeabilité

Théorème 22.20

On suppose que les suites u et v sont positives à partir d'un certain rang et que :

$$u_n = \circ(v_n)$$

i. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge également.

© www.stephanepreteseille.com

Preuve

i. On suppose que la série $\sum v_n$ converge et que les suites u et v sont positives à partir du rang n_0. Comme $u_n = \circ(v_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et un entier $n_1 \geqslant n_0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ u_n = \varepsilon_n v_n$$

De plus, comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un entier $p \geqslant n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ \varepsilon_n \leqslant 1$$

et alors, comme $p \geqslant n_0$:

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

D'après 22.19, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge.

ii. Ce résultat se déduit du précédent par contraposition.

□

Exercice 22.7 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n^3\,\mathrm{e}^{-n^2}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

Remarque On retiendra plus généralement la méthode suivante, qui sera utile dans un grand nombre de situations :

Méthode 22.21 ► S

u est une suite positive (au moins à partir d'un certain rang), pour étudier la nature de la série $\sum u_n$, on peut étudier la limite de la suite $(n^\alpha\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\, u_n = 0$ (en général on essaie avec $\alpha = 2$, alors :

$$u_n = \circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

ce qui permettra de prouver que la série $\sum u_n$ converge.

- S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\, u_n = +\infty$ (en général on essaie avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = \dfrac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{n^\alpha} = \circ(u_n)$$

ce qui permettra de prouver que la série $\sum u_n$ diverge.

C.3. Comparaison par équivalence

Théorème 22.22

On suppose que les suites u et v sont positives à partir d'un certain rang et que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature ; autrement dit, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Preuve On peut déjà remarquer que, si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$, donc si l'on prouve que la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$, alors la réciproque sera également vraie et le résultat annoncé sera démontré. On suppose donc que la série $\sum v_n$ converge et que les suites u et v sont positives à partir du rang n_0. Comme $u_n \sim v_n$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et un entier $n_1 \geqslant n_0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ u_n = h_n v_n$$

De plus, comme $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, il existe un entier $p \geqslant n_1$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ h_n \leqslant 2$$

et alors, comme $p \geqslant n_0$:

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2\,v_n$$

D'après 22.19, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge.

□

Exercice 22.8 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n!}\right)$

Remarques

a. Comme on l'a vu dans le deuxième exemple, il suffit que les deux suites soient de signe constant à partir d'un certain rang pour appliquer le critère de comparaison par équivalence. En effet, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si les suites sont négatives à partir d'un certain rang, alors $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ et les suites $-u$ et $-v$ sont positives à partir d'un certain rang : les séries $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont donc de même nature, donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b. En pratique, il suffira de s'intéresser au signe de l'une des deux suites seulement pour utiliser le critère de comparaison par équivalence. En effet, d'après (22.14), si u et v sont deux suites équivalentes, alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

D. Correction des exercices

Correction de l'exercice 22-1

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n+1}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+3} = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$$

Finalement, comme la fonction ln est continue en 2, on peut conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+3}\right) = \ln(2)$$

Correction de l'exercice 22-2

On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n\\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2}\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Ainsi, la suite u est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle admet une limite ℓ en $+\infty$, et que cette limite est finie si u est majorée et égale à $+\infty$ sinon.
Par ailleurs, on remarque que la suite u est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle fermé). Par conséquent, d'après le théorème du point fixe 22.3, si la suite u converge vers ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$.
Or on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x = f(x) &\iff x = \frac{x^2+1}{2} \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, si la suite u converge, ce ne peut être que vers 1 (ce qui, compte tenu de la remarque initiale) se produit si et seulement si la suite u est majorée.
Montrons alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ » est vraie.

- ◇ Pour $n = 0$. Comme $u_0 = 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$

  c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

  donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
- ◇ Finalement, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite u est majorée. Étant croissante, elle est donc convergente et d'après les remarques précédentes, on en déduit finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Correction de l'exercice 22-3

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - n + 2 = n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 1$$

et donc :

$$n^2 - n + 2 \sim n^2$$

Correction de l'exercice 22-4

D'après 22.7, on a : $\ln(n) = \circ(n^2)$ et donc : $n^2 + \ln(n) \sim n^2$.

Correction de l'exercice 22-5

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+n} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

De plus, d'après 22.17, on a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

et donc, d'après 22.15 :

$$\sqrt{n^2+n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{2n}$$

et finalement :

$$\sqrt{n^2+n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

et alors, d'après 22.11 :

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{2}$$

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

© www.stephanepreteseille.com

Correction de l'exercice 22-6

On a :

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On en déduit, d'après le critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 22-7

1. D'après les croissances comparées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^6\,\mathrm{e}^{-n^2} = 0$$

d'où :

$$n^3\,\mathrm{e}^{-n^2} = \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge et comme les suites $(n^3\,\mathrm{e}^{-n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives, on en déduit, d'après les critères de comparaison (par négligeabilité) des séries à termes positifs, que la série $\sum n^3\,\mathrm{e}^{-n^2}$ converge.

2. D'après les croissances comparées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

et donc :

$$\frac{1}{n} = \circ\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge et comme les suites $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives, on en déduit, d'après les critères de comparaison (par négligeabilité) des séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Correction de l'exercice 22-8

1. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

donc :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Comme les suites $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit, d'après 22.22, que la série $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$ diverge.

2. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n!}$$

soit encore :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!}$$

Comme les suites $\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\geqslant 2}$ sont positives et comme la série exponentielle $\sum \frac{1^n}{n!}$ converge, on en déduit, d'après 22.22, que la série $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right)$ converge, et donc que la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n!}\right)$ converge.

www.stephanepreteseille.com

© www.stephanepreteseille.com. Diffusion et reproduction interdites, même partiellement

Sommaire

© www.stephanepreteseille.com